Επαναληπτικές ασκήσεις Άλγεβρας Α λυκείου

1. Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lambda x+1=0,\ \lambda\in\mathbb{R}\quad(1)$.

i) Να βρεθεί ο αριθμός $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

ii) Να βρεθεί ο αριθμός $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ίσες πραγματικές ρίζες.

iii) Να βρεθεί ο αριθμός $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να μην έχει πραγματικές ρίζες.

iv) Να βρεθεί ο αριθμός $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $3x_1^2x_2+3x_2^2x_1+x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=0$ όπου x_1,x_2 είναι οι 2 άνισες ρίζες της εξίσωσης (1).

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2x+\frac{|\lambda|}{4}=0,\ \lambda\in\mathbb{R}\quad(1)$.

i) Να βρεθεί ο αριθμός $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

ii) Να βρεθεί ο αριθμός $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει μία διπλή πραγματική ρίζα.

iii) Να βρεθεί ο αριθμός $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

iv) Να βρεθεί ο αριθμός $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $\lambda^2+P-2=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$ όπου P το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1).

3. Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x-\lambda-\frac{1}{4}=0,\ \lambda\in\mathbb{R}\quad(1)$.

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) να έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii) Να ποια τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) έχει μία διπλή πραγματική ρίζα; Έπειτα να βρεθεί η ρίζα αυτή.

Ασκήσεις Άλγεβρας

Α λυκείου

2013-2014

iii) Για $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ να βρεθούν οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης (1).

iv) Για $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ να λυθεί η ανίσωση $2P < S$ όπου P, S το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών της εξίσωσης (1).

4. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, $x^2 - 3x + \gamma = 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}$, με $x_2 = x_1^2 + 1$.

i) Να βρεθούν οι ρίζες της x_1, x_2 με $x_1 < 0$.

ii) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός γ.

5. Δίνεται η εξίσωση, $ax^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0$ (1), $\alpha \neq 0$ *και* $\alpha > \beta$ με $\Delta^2 - 8\Delta + 16 = 0$, όπου Δ η ορίζουσα της εξίσωσης (1).

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε πραγματικούς α, β.

ii) να δείξετε ότι $a = \beta + 2$

iii) αν $S - P = \alpha$ όπου P, S το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β.

6. i) Να λυθεί η εξίσωση $(6\lambda^2 - 15\lambda + 6)x = 4 - \lambda^2$, (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$.
ii) Να λυθεί η εξίσωση $|(2\lambda - 1)x_1| = 2\lambda + 1$όπου η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1).

7. Έστω η εξίσωση, $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$ (1) με δύο πραγματικές άνισες ρίζες x_1, x_2 με $x_2 = 2x_1 - 4$ και με γινόμενο των ριζών ίσο με -2.
i) Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης (1).
ii) Να βρεθεί η εξίσωση (1).

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\dfrac{x^4 - x}{x - 1} = 0$ ii) $\dfrac{x^6 + 32x}{x} = 0$

iii) $\dfrac{x^4 + x^3 - x^2 - x}{x + 1} = 0$

9. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 - (2\lambda - 1)x + \lambda = 0, \ \lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$ (1)

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$.

ii) Να λυθεί η εξίσωση $|S| = 2$, όπου S είναι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης (1).

10. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 - \sqrt{2}\lambda x + \lambda + 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ (1).
i) Να υπολογίσετε την διακρίνουσα της (1).
ii) Για ποιες τιμές η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες;
iii) Να βρεθεί ο πραγματικός λ ώστε η ανίσωση $(\lambda - 1)x^2 - \sqrt{2}\lambda x + \lambda + 1 > 0, \ \lambda \neq 1$ να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

11. Δίνεται η εξίσωση, $(\lambda^2 + 3)x^2 + 4\lambda^2 x + 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ (1).
i) Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ ώστε η (1) να έχει ακριβώς μια ρίζα; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

ii) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε η εξίσωση (1) να έχει μία διπλή πραγματική ρίζα.

12. i) Να λυθεί η εξίσωση $\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)x=1-\lambda^2,\quad \lambda\in\mathbb{R}^*$ (1)

ii) Να λυθεί η ανίσωση $\sqrt{\lambda^2+2\lambda+1}+x_1=3,$ όπου x_1 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1).

13. Έστω τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω και η εξίσωση $x^2+P(\mathrm{A})x+\frac{1}{16}=0$ η οποία έχει μία διπλή ρίζα.

i) Να βρεθεί η πιθανότητα $P(\mathrm{A})$.

ii)Αν οι αριθμοί, $P(\mathrm{A}\cap B),\ P(\mathrm{A}-B),\ P(\mathrm{A})$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιούνται αμφότερα τα ενδεχόμενα Α,Β.

iii) Να λυθεί η ανίσωση $\left|P\left[(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\right]x\right|>\omega$ όπου ω η διαφορά της αριθμητικής προόδου $\ldots\ldots,P(\mathrm{A}),\ P(\mathrm{A}-B),\ P(\mathrm{A}\cap B),\ldots\ldots$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma,\ \mu\varepsilon\ \alpha\neq0\ \kappa\alpha\iota\ \beta\neq0$ όπου οι αριθμοί α,β,γ αποτελούν διαδοχικούς αριθμούς γεωμετρικής προόδου.

i) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν έχει σημεία τομής με τον άξονα $x'x$.

ii) Αν $S\cdot P=-8$, όπου S,P το άθροισμα και το γινόμενο της εξίσωσης $ax^2+\beta x+\gamma,\ \mu\varepsilon\ \alpha\neq0\ \kappa\alpha\iota\ \beta\neq0$ να δείξετε ότι $\beta=2\alpha$ και $\gamma=4\alpha$. (**ή διαφορετικά**: να δείξετε ότι η γεωμετρική πρόοδος έχει λόγο λ=2)

15. Έστω τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω και η συνάρτηση $f(x)=P(A)x+P(A-B)$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(-1,0)$.

i) Να δείξετε ότι $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

ii) Να δείξετε ότι οι αριθμοί $f(0),f(3),f(6)$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

iii) Να βρείτε την διαφορά ω της αριθμητικής προόδου $\ldots\ldots f(0),f(3),f(6)\ldots\ldots$ αν ο αριθμός $P(A)$ είναι λύση της εξίσωσης $2P^2(A)=|1-P(A)|$

16. Δίνεται η εξίσωση, $ax^2+(a+1)x+1=0,\ a\neq0$ (1) η οποία δεν είναι αδύνατη στο R. Έστω επίσης οι αριθμοί $\Delta,\ |\Delta+3|,\ 3\Delta+6$ αποτελούν διαδοχικούς αριθμούς αριθμητικής προόδου όπου Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης (1).

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει μία διπλή ρίζα

ii) Να δείξετε ότι $a=1$

Παραλλαγή πιο εύκολη: Δίνεται η εξίσωση $ax^2+(a+1)x+1=0,\ a\neq0$ (1) και έστω επίσης οι αριθμοί $\Delta,\ \Delta+3,\ 3\Delta+6$ αποτελούν διαδοχικούς αριθμούς αριθμητικής προόδου όπου Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης (1).

17. Έστω η εξίσωση, $\mu x^2+(3+\mu)x+6=0,\ \mu\varepsilon\ \ \mu<0\ \ \kappa\alpha\iota\ |\mu|>1$ (1) και η γεωμετρική πρόοδος $S,P,18,......$ όπου S,P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1).

i) Να δείξετε ότι $\mu=-2$

ii) Για $\mu=-2$ να παραγοντοποιήσετε και να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $\mu x^2+(3+\mu)x+6$.

ii) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου καθώς και το άθροισμα των 25 πρώτων όρων της.

18. Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης,

$$A=\left(1+\sqrt{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1-\sqrt[16]{a}\right)$$

για $a=\dfrac{1}{10}$

19. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2},x\neq 0$.

i) Να λυθεί η εξίσωση $x^2 f(x)-7|x+1|=8$

ii) Να λυθούν οι εξισώσεις α) $\sqrt{f(x)}=0$, β) $\sqrt{f(x)}=1$ και γ) $\sqrt{f(x)}=-1$

iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+\dfrac{1}{f(x)}=0$

iv) Να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2\left|f(x)\right|$ για κάθε $x\neq 0$.

v) Να λυθούν οι ανισώσεις α) $f(|x|)\geq 0$ και β) $f(|x|)\geq 4$.

20. Δίνεται η συνάρτηση, $g(x)=\lambda x^2-(\lambda-1)x-1,\lambda\epsilon R$ με $\lambda\neq 0,\lambda\neq -1$ και η συνάρτηση $f(x)=|x_1|x-|x_2|$ όπου x_1,x_2 οι λύσεις της εξίσωσης g(x)=0.

i) Να βρεθούν οι λύσεις x_1,x_2.

ii) Αν $x_1<x_2$ και $\lambda\epsilon(-1,0)$,

α) Να λυθεί ως προς λ η εξίσωση f(0)=f(1)

β) Να λυθεί ως προς λ η ανίσωση $\left|f(0)f(1)\right|>0$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $\left|f(x)+f(-x)\right|=g(1)+4$.

δ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g και η γραφική παράσταση της f τέμνονται σε δύο σημεία.

ε) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία (ε): $y=|x_1|x+|x_2|$ με τους άξονες xx' και yy'.

21. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και $g(x)=f(0)x^2+\left(f(1)-\beta\right)x+\alpha$ όπου α,β,γ ϵR με $\alpha\neq\gamma\neq 0$.

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x)$=0 (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις.

ii) Να δείξετε ότι οι λύσεις της (1) είναι $x_1=-1$ και $x_2=-\dfrac{\alpha}{\gamma}$.

iii) Αν η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο ρίζες αντίθετες τότε α) να βρεθούν οι λύσεις αυτές και β) να βρεθεί το πρόσημο της λύσης x_2 της εξίσωσης (1).

iv) Αν η εξίσωση f(x)=0 έχει δυο πραγματικές και άνισες λύσεις τις ρ_1,ρ_2

τότε να δείξετε ότι $\left|\rho_1+\rho_2\right|=\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|$ και $\left|\rho_1-\rho_2\right|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|\alpha|}$

22. Δίνεται η εξίσωση, $\beta x^2+\alpha x+1=0, \alpha\beta\epsilon R$ (1), όπου ισχύει $\alpha^2-2\beta^2<\alpha|\beta|$ και έστω x_1,x_2 ρίζες της (1). Να δειχθεί ότι $\left||x_1|-|x_2|\right|<2$.

23. Δίνεται η εξίσωση δευτέρου βαθμού $x^2-40|a_1|x+2|\lambda|=0$ (1) όπου $a_1,\lambda\neq 0$ ο πρώτος όρος και ο λόγος αντίστοιχα μιας γεωμετρικής προόδου. Αν οι αριθμοί x_1,λ,x_2 με x_1,x_2 ρίζες τις (1) αποτελούν διαδοχικούς όρους της γεωμετρικής προόδου να βρεθούν οι αριθμοί λ και a_1.

24. Δίνεται η εξίσωση, $x^2+(x_1-x_2)x-x_1x_2=0$ (1) όπου x_1,x_2 οι δύο άνισες πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$ (2)

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, μία ίση και μία αντίθετη με τις ρίζες της εξίσωσης (2).

ii)Αν ισχύει, $(x_1+x_2)^2-6|x_1+x_2|=-9-\sqrt{x_1^2x_2^2-4}$ και $x_1,x_2>0$ να βρεθεί η εξίσωση (2).

25. Έστω οι θετικοί αριθμοί α,β,γ με $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ και $\beta>\gamma$. Αν επιπλέον οι αριθμοί α,β,γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2-P\sqrt{\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right|}=\lambda x$ για τις διάφορες τιμές του λ, όπου P το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $-\gamma x^2+x+\beta=0$ και $\lambda\epsilon R$.