Theoretische Physik 1b: Mechanik
Übungsblatt 3

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Dr. Michael Marthaler
Andrii Sokolov, M.Sc.

SS 2018 **Abgabe 30.01.2018**

***Info**: Bitte schreiben Sie Name und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt und tackern Sie dieses. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.*

Aufgabe 1: Extrema einer Funktion einer einzigen Variable (*15 Punkte*)

Wir betrachten die Funktion

$$s(D) = \frac{1}{\sqrt{(D-X)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{(D+X)^2+1}},$$

wobei X ein beliebiger Parameter ist.

(a) Wenn wir die Maximalstellen von $s(D)$ für $X > 0$ kennen, wie bestimmen wir die Maximalstellen für $X < 0$? (*1 Punkt*)

(b) Bestimmen Sie die Gleichung für die kritischen Punkte von $s(D)$. Zeigen Sie, dass für $X > 0$ die Gleichung nur für $D > X$ erfüllt werden kann. (*1 Punkt*)

(c) Zeigen Sie, dass der kritische Punkt D eine Maximalstelle ist, falls folgende Ungleichung erfüllt ist

$$\frac{2(D-X)^2-1}{\left((D-X)^2+1\right)^{5/2}} < \frac{2(D+X)^2-1}{\left((D+X)^2+1\right)^{5/2}}. \tag{1}$$

(*2 Punkte*)

(d) Zeigen Sie für $X > 0$, dass alle kritischen Punkten Maximalstellen sind. Versuchen Sie -1 in den beiden Zählern der Ungleichung (1) zu entfernen. Wenn Ihre neue Ungleichung erfüllt ist, sollte die ursprüngliche Ungleichung auch immer erfüllt sein. Vereinfachen Sie dann die Ungleichung, indem Sie mit der Gleichung für die kritischen Punkte aus Aufgabenteil (b) multiplizieren. (*4 Punkte*)

(d′) *Bonus Aufgabe!* Zeigen Sie für $X > 0$, dass der kritische Punkt D die folgende Ungleichung erfüllt:

$$D < \sqrt{X^2+1}\,. \tag{2}$$

Multiplizieren Sie dazu die Ungleichung $\sqrt{D-X} < \sqrt{D+X}$ mit der Gleichung für die kritischen Punkten. (*3 Punkte*)

(e) Bestimmen Sie die Maxima für $X \ll 1$. Entwicklen sie den Bruch $(X^2 \pm 2DX)/(D^2+1)$ in der Gleichung für die kritischen Punkte bis zur ersten Ordnung. Vernachlässigen Sie dabei Terme proportional zu X^2 und höher. Damit ist es möglich die Gleichung analytisch zu lösen. Berechnen Sie den nächst höheren Term der Entwicklung und überpüfen Sie, ob dieser Term für Ihre Lösung unter der Bedinung $X \ll 1$ wirklich vernachlässigbar ist. (*4 Punkte*)

(f) Zeichnen Sie die Abhängigkeit der Maximalstellen D von X für $|X| \leq 3$. Sie können dazu die Gleichung für die kritischen Punkte numerisch für verschiedene Werte von X lösen. Prüfen Sie, ob die Punkte die Sie gefunden haben, $s(D)$ maximieren. Was passiert bei $X = 0$? Markieren Sie die Lösung für $X \ll 1$ in Ihrer Darstellung.

Um diese Aufgabe, zu lösen können Sie beliebige Programme einsetzen. (*3 Punkte*)

(g) *Bonus Aufgabe!* Zeigen Sie, dass die Funktion $s(D)$ mit dem elekrostatischen Potential eines Dipols verknüpft ist. (*3 Punkte*)

Aufgabe 2: Extrema einer Funktion mehrerer Variablen (*10 Punkte*)

Finden Sie die Extrema der Folgenden Funktion $z(x, y)$:

(a) $z = xy + 50/x + 20/y, \quad x, y > 0$ (*2 Punkte*)

(b) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ (*2 Punkte*)

(c) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ (*2 Punkte*)

Finden Sie die Extrema der

(d) Funktion u von drei Variablen,
$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z,$ (*2 Punkte*)

(e) impliziten Funktion $z(x, y)$,
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z = 10.$ (*2 Punkte*)

Aufgabe 3: Extremalisierung mit Nebenbedingungen (*15 Punkte*)

(a) Was ist der kürzeste Abstand zwischen der Geraden $y = x+4$ und der Ellipse $x^2+4y^2 = 4$?

- (i) Was sollten Sie vor Bearbeitung der Fragestellung zunächst überprüfen? (*1 Punkt*)
- (ii) Geben Sie die zu minimierende Funktion und alle auftretenden Nebenbedingungen an. (*2 Punkte*)
- (iii) Lösen Sie die Fragestellung mithilfe der Methode Lagrangeschen Multiplikatoren. (*3 Punkte*)

(b) Welcher ist der volumensgrößte Quader, den man in das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

einschreiben kann? (*4 Punkte*)

(c) Beweisen Sie dass

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n, \quad \text{mit } x, y \geq 0 \text{ und } n \geq 1. \tag{3}$$

Um diese Unlgeichung zu beweisen können Sie z.B. das Minimum der linken Seite der Ungleichung bestimmen, unter der Annahme das die rechte Seite eine Konstante ist. (*5 Punkte*)