Theoretische Physik 1b: Klassische Mechanik
Übungsblatt 13

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Dr. Michael Marthaler
Andrii Sokolov, M.Sc.

SS 2018 **Abgabe 09.07.2018**

***Info**: Bitte schreiben Sie Name und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt und tackern Sie dieses. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.*

Aufgabe 1: Saitenschwingung und Lösungsmethode nach D'Alembert (*15 Punkte*)

Die Auslenkung $u(x,t)$ einer Saite genügt der Wellengleichung und der Randbedingung

$$u''(x,t) - \ddot{u}(x,t)/c^2 = 0$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ für die Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = A\left(1 - \left|1 - \frac{2x}{l}\right|\right), \qquad \dot{u}(x,0) = 0 \tag{1}$$

(*5 Punkte*)

(b) Zeigen Sie, dass die Wellengleichung $u''(x,t) - \ddot{u}(x,t)/c^2 = 0$ durch

$$u(x,t) = f(x-ct) \qquad \text{und} \qquad u(x,t) = g(x+ct)$$

gelöst wird. Dabei sind f und g beliebige Funktionen einer Variablen. (*3 Punkte*)

(c) Wie hängen f und g mit den Anfangsbedingungen zusammen? (*2 Punkte*)

(d) Wenden Sie die Lösungsmethode nach d'Alembert auf die Saitenschwingung aus Aufgabenteil (a) an. Berechnen Sie damit $u(x,t)$ für $0 \neq t \neq T/4$ mit $T = 2l/c$. Das Ergebnis für die ganze Periode erhalten Sie dann aus Symmetrieüberlegungen. (*5 Punkte*)
Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$. Finden Sie eine Form von f und g mit der die Anfangsbedingung (1) erfüllt ist und es gilt $f(x) = g(x)$. Prüfen Sie dann, dass diese Lösung für $0 \neq t \neq T/4$ mit $T = 2l/c$ die Randbedingungen erfüllt.

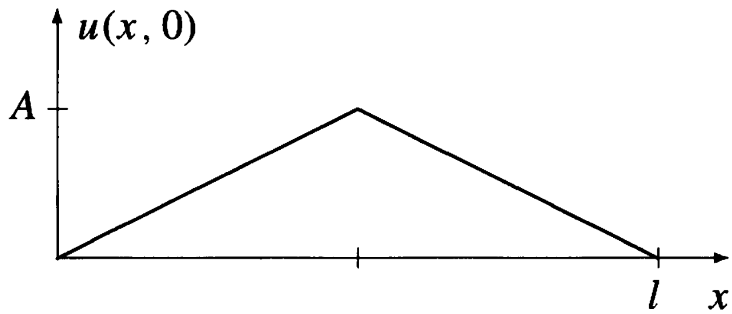

Abbildung 1: Anfangsbedingungen in Aufgabe 1a).

Aufgabe 2: Schwingende Membran (*10 Punkte*)

Wir betrachten eine zweidimensionale elastische Membran in der x-y-Ebene, die bei $x = 0$ und $x = l_x$ sowie bei $y = 0$ und $y = l_y$ eingespannt ist. Gesucht ist die allgemeine Lösung $q_z(t, x, y)$ für die Auslenkung der Membran entlang der z-Achse. Dies könnte beispielsweise das einfache Modell einer rechteckigen Trommel sein. Man kann die Bewegungsgleichung der schwingenden Saite verallgemeinern und findet für die Membran ganz analog

$$\ddot{q}_z - v_\perp^2 \left(\frac{\partial^2 q_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_z}{\partial y^2} \right) = 0, \qquad v_\perp = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \tag{2}$$

wobei ρ die auf die Fläche bezogene Massendichte ist und die Spannung τ die zur Kraft analoge Größe. Die Spannung hat die Bedeutung einer Kraft pro Länge, d.h. pro eingespannter Einheitslänge wirkt die Kraft τ auf den Rand der Membran. Die Gesamtkraft, die bei $x = 0$ bzw. $x = l_x$ die Membran einspannt, ist also $-\tau l_y$ bzw. $+\tau l_y$. Analog für die Kraft an den fixierten Enden in y-Richtung. Die Membran sei ansonsten kräftefrei.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $q_z(t, x, y) = f(t)g(x)h(y)$ mit

$$\begin{aligned} f(t) &= C_f \sin(\omega t - \phi_f) \\ g(x) &= C_g \sin(k_x x - \phi_g) \\ h(y) &= C_h \sin(k_y y - \phi_h) \end{aligned}$$

die Differenzialgleichung (2) der Membran löst. Wie lautet die Dispersionsrelation $\omega = \omega(k_x, k_y)$? (*4 Punkte*)

(b) Wie sind die Integrationskonstanten zu wählen, damit die Randbedingungen erfüllt werden? (*3 Punkte*)

(c) Zeigen Sie dann, dass die allgemeine Lösung durch eine Fourierreihe in x und x gegeben ist. (*3 Punkte*)

Aufgabe 3: Poisseuille-Fluss im Rohr (*15 Punkte*)

Betrachten Sie ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt (Radius R) entlang der z-Achse. Ein Druckgradient $\nabla P = (0, 0, -P') = \text{const}$ treibt eine inkompressible Strömung an, von der angenommen werden kann, dass sie stationär ist.

(a) Überlegen Sie sich wie sich eventuell vorliegende Symmetrien auf die Lösung der stationären Navier-Stokes-Gleichungen

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\, \vec{u} = -\nabla P + \eta \Delta \vec{u} \tag{3}$$

auswirken. Denken Sie insbesondere an die mögliche Strömungsrichtung und von welchen Variablen das Geschwindigkeitsfeld tatsächlich abhängt. (*3 Punkte*)

(b) Nutzen Sie die Symmetrieüberlegungen aus Teil (a) und leiten Sie ausgehend von den Navier-Stokes-Gleichungen (3) und unter der Annahme, dass die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Rohres verschwindet, das Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(\rho)$ ab. (*8 Punkte*)

Hinweis: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten und den entsprechenden Laplace-Operator

$$\Delta f(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Fordern Sie bei der Integration, dass $\vec{u}$ für $\rho \to 0$ nicht divergieren soll.

(c) Berechnen Sie außerdem den Volumenstrom durch eine Querschnittsfläche des Rohres. (*4 Punkte*)