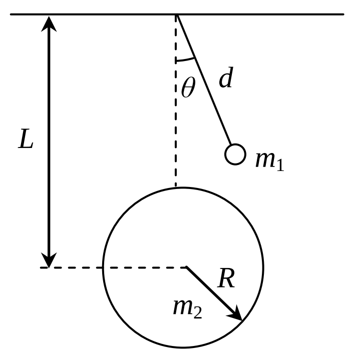
Davit Sipayung
davitsipayung@gmail.com

Soal Olimpiade Sains Tingkat Provinsi 2017

Bidang Fisika SMA

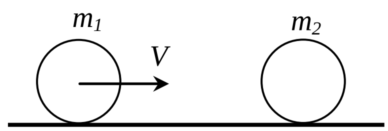
Waktu : 3,5 jam

1. (**10 poin**) Tinjau sebuah sistem terisolasi yang terdiri dari 2 benda, m_1 dan m_2. Dalam sistem ini gaya gravitasi lain dari benda lain di luar sistem dapat diabaikan. Massa m_1 terpasang pada tali tak bermassa sepanjang d dan membentuk sebuah bandul yang dipasang tetap pada titik O. Massa M_1 hanya mengalami gaya gravitasi dengan bola homogen bermassa m_2 berjari-jari R yang posisinya tetap dimana pusat bola berjarak L dari titik O. Nilai L hanya sedikit lebih besar dari $d+R$. Sudut antara tali dan garis vertikal yang melalui titik O adalah θ, dimana diasumsikan θ kecil. Tentukan periode osilasi m_1.

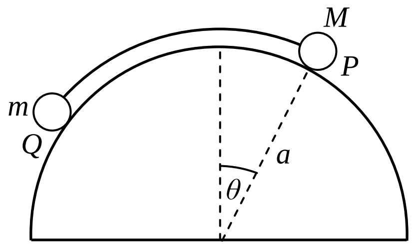


2. (**14 poin**) Pada gambar terlihat dua buah bola masing-masing bermassa m_1 dan m_2 serta berjari-jari sama R berada di atas bidang datar. Bola m_1 menggelinding tanpa slip ke arah kanan dengan kecepatan pusat massa V menuju bola m_2 yang sedang diam. Asumsikan semua gaya gesek yang ada cukup kecil untuk dapat mengabaikan terjadinya efek pada saaat tumbukan, dan anggap jenis tumbukannya elastis. Jika $m_2 = 2m_1$ tentukan:
   a. kecepatan pusat massa masing-masing bola sesaat setelah tumbukan
   b. kecepatan pusat massa masing-masing bola setelah cukup lama bertumbukan dan masing-masing bola kembali menggelinding tanpa slip.
   c. prosentase energi yang hilang akibat gesekan.

Davit Sipayung
davitsipayung@gmail.com

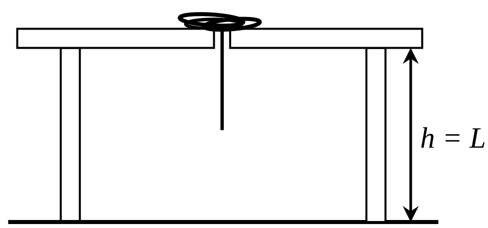


3. (**14 poin**) Dua partikel P dan Q, masing-masing dengan massa m_P = M dan m_Q = m, terhubung satu sama lain membentuk sistem PQ oleh sepotong tali ringan (panjang $L=\pi a/2$) yang tidak dapat molor dan juga tidak dapat menyusut. Kedua partikel dapat bergerak di atas permukaan luar silinder licin yang posisinya tetap di atas bidang datar (lihat gambar).
   a. Tentukan posisi kesetimbangan sistem PQ, dan tentukan sifat kesetimbangannya (stabil atau labil)
   b. Katakan massa kedua partikel di atas masing-masing adalah m_P = $2m$ dan m_Q = m. Diketahui sistem PQ mula-mula diam (t=0) di posisi awal saat kedua partikel memiliki pada sudut θ yang simetris/sama, yaitu sudut antara garis OP dan QP dengan arah vertikal sebesar $\theta_0 = \pi/4$, lalu sistem tersebut dilepaskan untuk bergerak. Tentukan:
      i. persamaan gerak sistem selanjutnya (t>0) yang menjamin berlakunya hukum kekekalan energi mekanik total sistem, dinyatakan dalam koordinat θ.
      ii. besar gaya reaksi atau normal silinder yang dirasakan oleh masing-masing partikel.
      iii. besar sudut θ saat partikel sudah lepas meninggalkan permukaan silinder.



4. (**16 poin**) Sebuah meja setinggi h memiliki lubang ditengah permukaannya. Sebuah rantai tipis homogen bermassa M dengan panjang $L=h$ diletakkan dengan cara "dikumpulkan" disekitar lubang tersebut. Salah satu ujung rantai ditarik sedikit melewati lubang kemudian dilepaskan sehingga rantai "jatuh" melalui lubang tersebut dengan kecepatan yang bertambah seiring panjang rantai yang berada di bawah permukaan meja juga bertambah. Asumsikan tidak ada gaya gesek yang bekerja. Percepatan gravitasi adalah g. Tentukan :

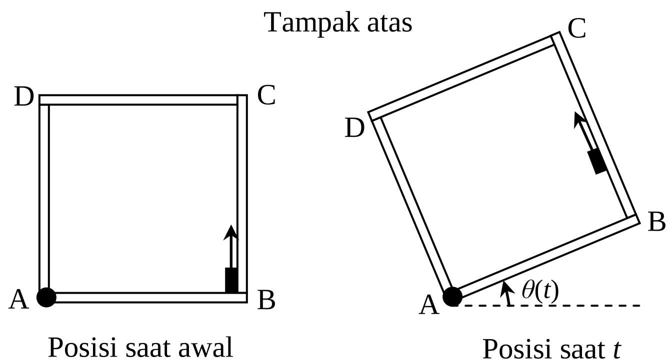
a. Percepatan rantai selama belum menyentuh rantai
b. Kecepatan ketika rantai pertama kali menyentuh rantai
c. Gaya normal yang dirasakan lantai akibat jatuhnya rantai sebagai fungsi waktu
d. Waktu yang dibutuhkan ujung lain rantai mencapai tanah dihitung sejak rantai mulai bergerak.
e. Gaya normal ketika semua bagian rantai sudah berada di atas lantai untuk kondisi :
   i. Tepat setelah selesai melakukan geraknya
   ii. Ketika waktu yang sangat lama



5. (**14 poin**) Sebuah persegi ABCD tersusun dari empat buah batang tegar homogen identik yang masing-masing memiliki panjang *2a* dan bermassa *m*. Persegi tersebut ditempatkan pada bidang horizontal licin dan diengselkan di titik A, sehingga dapat berputar bebas di sekitar titik A tersebut. Seekor serangga dengan massa *m* berjalan mulai dari titik B di sepanjang batang BC dengan kecepatan konstan *V* relatif terhadap batang. Ketika serangga tersebut berjalan selama *t* detik, serangga sampai di titik E (titik E berada diantara titik B dan C) dan diketahui batang sudah berputar sejauh

$$\theta(t) = \sqrt{\frac{13}{3}} \tan^{-1}\left(\frac{Vt}{2a}\sqrt{\frac{3}{13}}\right)$$

Davit Sipayung
davitsipayung@gmail.com



Tentukan (dinyakan dalam V, a, m, dan t) :

a. Kecepatan dan percepatan sudut persegi tersebut sebagai fungsi dari waktu

b. Momen inersia sistem (persegi dan serangga) relatif terhadap titik putar A pada saat t.

c. Gaya normal antara serangga dan batang

d. Gaya berarah sejajar BC pada serangga yang menyebabkan seranggga dapat bergerak dengan kecepatan konstan relatif terhdap persegi.

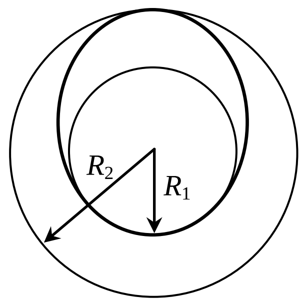
Pentunjuk : $\dfrac{d\tan x}{dx} = \sec^2 x$

6. (**18 poin**) Sebuah roket bermassa total m mengelilingi bumi pada *low earth orbit* berbentuk lingkaran dengan jari-jari orbit R_1. Pesawat ini akan berpindah orbit menuju orbit menuju orbit berjari jari $R_2 > R_1$ dengan cara mengubah bentuk orbitnya dalam bentuk orbit elips seperti yang ditunjukkan oleh garis tebal pada gambar disamping. Manuver orbit ini dicapai dengan membuang bahan bakar sebanyak $\Delta m_1>0$ sehingga memberika laju Δv_1 searah kecepatan orbit pada orbit rendah. Kemudia roket membuang lagi bahan bakar sebanyak $\Delta m_2>0$ sehingga memberikan tambahan laju Δv_2 searah kecepatan orbit pada orbit tinggi. Laju orbit roket untuk orbit rendah adalah v_{R_1}. Bahan bakar roket memiliki laju buang konstan v_f relatif terhadap roket. Tentukan :

a. tambahan laju Δv_1 yang dibutuhkan untuk mengubah orbit dari lingkaran berjari-jari R_1 menjadi elips (nyatakan dalam v_{R_1}, R_1, R_1)

b. tambahan laju Δv_2 yang dibutuhkan untuk mengubah orbit dari elips menjadi lingkaran berjari-jari R_2 (nyatakan dalam v_{R_1}, R_1, R_1)

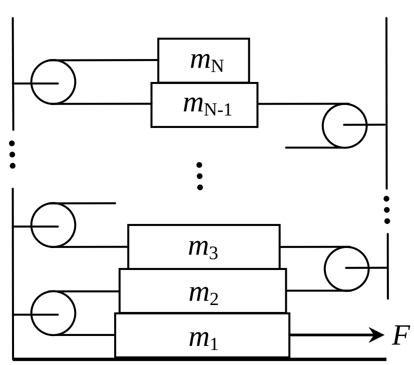
c. massa bahan bakar yang terbuang Δm_1 dan Δm_2 agar roket dapat melakukan manuver tersebut (nyatakan dalam m, v_{R_1} , v_f, R_1, R_1)



7. Gambar di bawah ini menunjukkan susunan N buah balok yang masing-masing bermassa m_1, m_2, ..., m_N (N bilangan genap). Balok m_1 terhubung dengan balok m_2 yang berada di atasnya melalui tali tak bermassa yang tak dapat mulur yang dilewatkan pada katrol. Demikian pula balok m_3 yang berada di atas balok m_3 yang berada di atas balok m_2 terhubung dengan balok m_2 tersebut melalui tak bermassa yang tak dapat mulur yang dilwatkan pada katrol. Begitu seterusnya hingga balok m_N yang berada di atas balok m_{N-1}. Seluruh katrol tersebut masing-masing memiliki momen inersia I dan jari-jari R yang sama. Koefisien gesek antara balok m_1 dengan lantai maupun antar semua permukaan balok yang berimpit bernilai sama sebesar μ. Percepatan gravitasi g ke bawah. Balok m_1 ditarik dengan gaya horizontal F yang cukup besar sehingga sistem bergerak dengan percepatan a terhadap lantai.

a. Tentukan besar percepatan a dinyatakan dalam besaran-besaran di atas.

b. Jika N = 10 dengan seluruh massa balok adalah sama besar m, momen inersia I = ½ mR^2, serta percepatan $a=g$ maka gaya F yang diberikan dapat dinyatakan sebagai $F = kmg$. Tentukan nilai k.



Pembahasan Olimpiade Sains Tingkat Provinsi 2017

Bidang Fisika SMA

Waktu : 3,5 jam

1. *Pembahasan* :

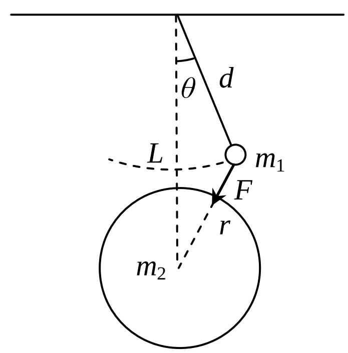
Periode osilasi benda m_1 adalah

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad ....(1)$$

dengan ω adalah frekuensi sudut sistem yang diperoleh dari persamaan gerak benda. Variabel osilasi sistem adalah θ sehingga sistem akan memiliki persamaan gerak osilasi berikut ini

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad ....(2)$$

Persamaan gerak sistem di atas mungkin dihasilkan mengunakan cara hukum II Newton, hukum II Newton untuk gerak rotasi dan kekekalan energi mekanik.



Arah gaya gravitasi, F, berubah-ubah menyebabkan lebih sederhana menggunakan kekekalan energi mekanik dibandingkan hukum II Newton untuk mendapatkan persamaan gerak sistem. Energi mekanik sistem adalah

$$EM = EK + EP$$
$$= \frac{1}{2} m_1 v^2 - \frac{G m_1 m_2}{r} \quad ....(3)$$

Kecepatan benda m_1 adalah v_1 = (dθ/dt) d. Menurut aturan cosinus,

$$r^2 = L^2 + d^2 - 2Ld\cos\theta \quad ....(4)$$

Energi mekanik sistem kekal sehingga perubahan energi mekanik terhadap waktu sama dengan nol.

$$\frac{d\left(EM\right)}{dt}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1v^2-\frac{Gm_1m_2}{\left(L^2+d^2-2Ld\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}}\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1d^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-Gm_1m_2\left(L^2+d^2-2Ld\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}\right)=0$$

$$\frac{1}{2}m_1d^2\,2\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)-Gm_1m_2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(L^2+d^2-2Ld\cos\theta\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(2Ld\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{Gm_2L}{d\left(L^2+d^2-2Ld\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta=0 \quad \text{... (5)}$$

Syarat osilasi kecil adalah sin$\theta\approx\theta$ dan cos$\theta\approx1$ sehingga persamaan (5) dapat ditulis ulang menjadi

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{Gm_2L}{d\left(L^2+d^2-2Ld\right)^{\frac{3}{2}}}\theta=0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{Gm_2L}{d\left(L-d\right)^3}\theta=0 \quad \text{..................(6)}$$

Frekuensi sudut sistem menurut kesamaan persamaan (2) dan persamaan (6):

$$\omega=\frac{Gm_2L}{d\left(L-d\right)^3} \quad \text{..................(7)}$$

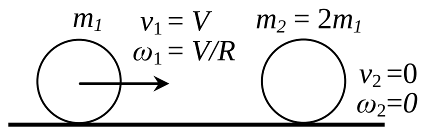
Periode osilasi benda m_1 adalah

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{d\left(L-d\right)^3}{Gm_2L}} \quad \text{..................(8)}$$

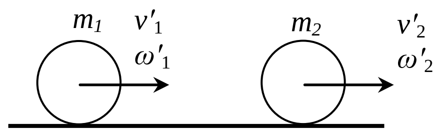
2. *Pembahasan* :

a. Diagram gerak masing-masing bola sebelum dan sesaat setelah tumbukan:

Davit Sipayung
davitsipayung@gmail.com



Sebelum tumbukan



Sesaat setelah tumbukan

Gaya eksternal total pada arah horizontal sama dengan nol meyebabkan berlaku hukum kekekalan momentum linier sistem searah horizontal (gaya gesek diabaikan selama proses tumbukan akibat gaya tumbukan jauh lebih besar dari gaya gesek) :

$$\sum p_{awal} = \sum p_{akhir}$$
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2$$
$$m_1 V + 2m_1 \cdot 0 = m_1 v_1' + 2m_1 v_2$$
$$v_1' + 2v_2' = V \quad ....(1)$$

Koefisien restitusi tumbukan, yaitu e =1 untuk tumbukan elastis :

$$e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1}$$
$$1 = -\frac{v_2' - v_1'}{0 - V}$$
$$v_2' = v_1' + v \quad ....(2)$$

Substitusikan persamaan (2) ke persamaan (1) :

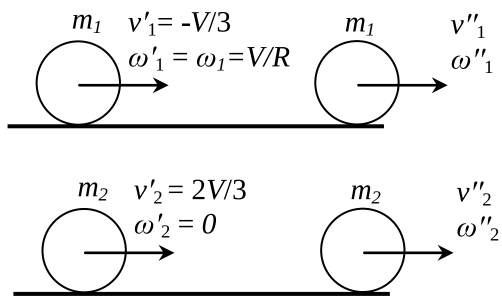
$$v_1' + 2\left(v_1' + V\right) = V$$
$$v_1' = -\frac{1}{3}V \quad ....(3)$$

Substitusikan persamaan (3) ke persamaan (2) :

$$v_2' = -\frac{1}{3}V + V = \frac{2}{3}V \quad ....(4)$$

Sesaat setelah tumbukan, bola m_1 bergerak ke kiri dan bola m_2 bergerak ke kanan.

b. Syarat benda m_1 dan benda m_2 mengelinding tanpa slip berturut –turut adalah $v''_1 = \omega''_1 R$ dan $v''_2 = \omega''_2 R$. Diagram gerak bola sesaat setelah tumbukan dan setelah kembali menggelinding tanpa slip, yaitu :



Tumbukan tidak mengubah besar kecepatan sudut kedua bola karena gaya tumbukan dan gaya gesek tidak menghasilkan torsi yang dapat mengubah kecepatan bola selama proses tumbukan. Kecepatan pusat massa bola dapat dihitung menggunakan dua cara, yaitu hukum II Newton dan hukum kekekalan momentum sudut terhadap bidang karena torsi terhadap bidang sama dengan nol. Disini, kita pilih cara hukum kekekalan momentum sudut karena lebih sederhana.

Kekekalan momentum sudut bola m_1 terhadap bidang :

$$\sum L_{awal} = \sum L_{akhir}$$
$$m_1 v_1' R + I_1 \omega_1' = m_1 v_1'' R + I_1 \omega_1''$$
$$m_1 \cdot \left(-\frac{1}{3}V\right) R + \frac{2}{5} m_1 R^2 \left(\frac{V}{R}\right) = m_1 v_1'' R + \frac{2}{5} m_1 R^2 \left(\frac{v_1''}{R}\right)$$
$$-\frac{1}{3}V + \frac{2}{5}V = v_1'' + \frac{2}{5} v_1''$$
$$v_1'' = \frac{1}{21}V \quad \text{..................(5)}$$

Kekekalan momentum sudut bola m_2 terhadap bidang:

$$\sum L_{awal} = \sum L_{akhir}$$
$$m_2 v_2' R + I_2 \omega_2' = m_2 v_2'' R + I_2 \omega_2''$$
$$m_2 \cdot \left(\frac{2}{3}V\right) R + \frac{2}{5} m_2 R^2 \cdot 0 = m_2 v_2'' R + \frac{2}{5} m_2 R^2 \left(\frac{v_2''}{R}\right)$$
$$\frac{2}{3}V = v_2'' + \frac{2}{5} v_2''$$
$$v_2'' = \frac{10}{21}V \quad \text{..................(6)}$$

c. Prosentase energi yang hilang akibat gesekan sama dengan perbandingan energi kinetik yang hilang dan energi kinetik awal sistem kemudian dikali seratus persen.

Energi kinetik awal sistem :

$$EK_{awal}=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}I_1\omega_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2$$
$$=\frac{1}{2}m_1V^2 \quad ....(7)$$

Energi kinetik akhir sistem :

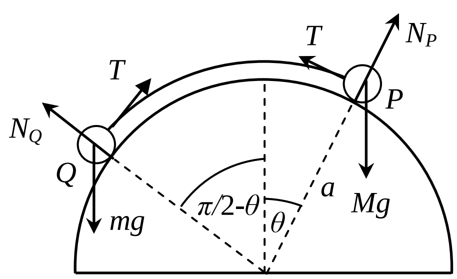
$$EK_{akhir}=\frac{1}{2}m_1\left(\frac{1}{21}V\right)^2+\frac{1}{2}\frac{2}{5}m_1R^2\left(\frac{1}{21}\frac{V}{R}\right)^2+\frac{1}{2}2m_1\left(\frac{10}{21}V\right)^2+\frac{1}{2}\frac{2}{5}2m_1R^2\left(\frac{10}{21}\frac{V}{R}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}m_1V^2\frac{1}{21^2}\left(1+\frac{2}{5}+200+80\right)$$
$$=\frac{1407}{2205}\frac{1}{2}m_1V^2 \quad ....(8)$$

Porsentase energi yang hilang :

$$\%E_{hilang}=\frac{EK_{awal}-EK_{akhir}}{EK_{awal}}\times 100\%$$
$$=\frac{\frac{1}{2}m_1V^2-\frac{1407}{2205}\frac{1}{2}m_1V^2}{\frac{1}{2}m_1V^2}\times 100\%$$
$$=\left(1-\frac{1407}{2205}\right)\times 100\%$$
$$=45,3\% \quad ....(9)$$

3. *Pembahasan*:

 a. Syarat kesetimbangan stabil adalah resultan gaya yang bekerja pada benda sama dengan nol. Diagram benda bebas pada masing-masing partikel :



Hukum II Newton pada partikel P dan Q dalam arah tangensial :

$$\sum F=m_Pa_P=0$$
$$Mg\sin\theta-T=0 \quad ....(1)$$

$\sum F = m_Q a_Q = 0$

$T - mg\sin\theta = 0$ ....(2)

Jumlahkan persamaan (1) dan persamaan (2) untuk mendapatkan posisi kesetimbangan PQ adalah

$\theta_s = \tan^{-1}\left(\frac{M}{m}\right)$ ....(3)

b. (i) Syarat berlakunya hukum kekekalan energi mekanik total sistem adalah energi mekanik tidak berubah terhadap waktu atau turunan energi mekanik total sistem terhadap waktu sama dengan nol. Pilih energi potensial nol di pusat silinder. Energi mekanik sistem adalah

$$EM = \frac{1}{2}m_P v_P^2 + Mgy_P + \frac{1}{2}m_Q v_Q^2 + Mgy_Q$$

$$= \frac{1}{2}(2m+m)\left(a\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2mga\cos\theta + mga\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$= \frac{3}{2}ma^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2mga\cos\theta + mga\sin\theta \quad \text{..................(4)}$$

Persamaan gerak sistem adalah

$$\frac{d}{dt}(EM) = 0$$

$$\frac{3}{2}ma^2 2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) - 2mga\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right) + mga\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{3a}(\cos\theta - 2\sin\theta) = 0 \quad \text{..................(5)}$$

(ii) Hukum II Newton pada partikel P dan Q dalam arah radial adalah

$\sum F = m_P a_P$

$2mg\cos\theta - N_P = 2m\omega^2 a$ ....(6)

$\sum F = m_Q a_Q$

$mg\cos\theta - N_Q = m\omega^2 a$ ....(7)

Kekekalan energi mekanik sistem :

$$EM_{awal} = EM_{akhir}$$

$$2mga\cos\frac{\pi}{2} + mga\cos\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}ma^2\omega^2 + 2mga\cos\theta + mga\sin\theta$$

$$\omega^2 = \frac{2g}{3a}\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2\cos\theta - \sin\theta\right) \quad ....(8)$$

Substitusikan persamaan (8) ke persamaan (6) dan persamaan (7) :

$$\begin{aligned} N_P &= 2mg\cos\theta - 2m\omega^2 a \\ &= 2mg\cos\theta - \frac{4mg}{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2\cos\theta - \sin\theta\right) \\ &= mg\left(\frac{14}{3}\cos\theta + \frac{4}{3}\sin\theta - 2\sqrt{2}\right) \quad ....(9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_Q &= mg\sin\theta - m\omega^2 a \\ &= mg\sin\theta - \frac{2mg}{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2\cos\theta - \sin\theta\right) \\ &= mg\left(\frac{4}{3}\cos\theta + \frac{5}{3}\sin\theta - \sqrt{2}\right) \quad ....(10) \end{aligned}$$

(iii) Syarat partikel meninggalkan silinder adalah gaya normal sama dengan nol.

Partikel P meninggalkan silinder :

$$N_P = 0$$

$$mg\left(\frac{14}{3}\cos\theta + \frac{4}{3}\sin\theta - 2\sqrt{2}\right) = 0$$

$$7\cos\theta + 2\sin\theta = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{7^2 + 2^2}\cos\left(\theta - \tan^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)\right) = 3\sqrt{2}$$

$$\cos\left(\theta - \tan^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)\right) = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{53}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{53}}\right) \quad ....(11)$$

Partikel Q meninggalkan silinder :

$$N_Q = 0$$

$$mg\left(\frac{4}{3}\cos\theta + \frac{5}{3}\sin\theta - \sqrt{2}\right) = 0$$

$$4\cos\theta + 5\sin\theta = 3\sqrt{2}$$

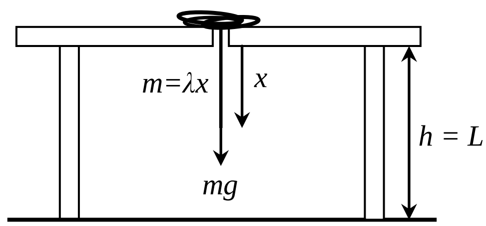
$$\sqrt{4^2+5^2}\cos\left(\theta - \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right) = 3\sqrt{2}$$

$$\cos\left(\theta - \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right) = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{41}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{41}}\right) \quad ....(12)$$

4. *Pembahasan* :

a. Diagram gerak dan diagram gaya rantai sebelum mencapai lantai :



Misalkan bagian rantai yang menggantung vertikal adalah *x*, kerapatan massa rantai adalah $\lambda = M/L$ dan massa rantai yang jatuh dari meja adalah $m=\lambda x$. Hukum II Newton untuk massa sistem berubah adalah

$$F = \frac{dp}{dt}$$

$$mg - T = \frac{d}{dt}(mv) \quad ....(1)$$

Tegangan tali nol di ujung rantai akibatnya

$$mg = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

$$\lambda xg = \lambda x\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} + v\frac{d}{dt}(\lambda x)$$

$$gx = xv\frac{dv}{dx} + v^2 \quad ....(2)$$

Misalkan solusi kecepatan rantai sebagai fungsi posisi adalah

$$v = kx^n \quad ....(3)$$

dengan k adalah konstanta. Substitusi persamaan (3) ke persamaan (2) :

$$gx = x \cdot kx^n \cdot knx^{n-1} + k^2 x^{2n}$$

$$gx = k^2 (n+1) x^{2n} \quad ....(4)$$

Menurut kesamaan ruas kanan dan ruas kiri persamaan (4) diperoleh

$$1 = 2n \;\rightarrow\; n = \frac{1}{2} \quad ....(5)$$

$$g = k^2 (n+1) \;\rightarrow\; k = \sqrt{\frac{g}{n+1}} = \sqrt{\frac{2g}{3}} \quad ....(6)$$

Kecepatan rantai sebagai fungsi posisi diperoleh dengan mensubsitusi persamaan (5) dan persamaan (6) ke persamaan (3) adalah

$$v = \sqrt{\frac{2gx}{3}} \quad ....(7)$$

Percepatan rantai adalah

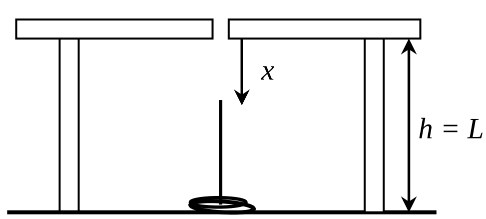
$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ &= v\frac{dv}{dx} \\ &= \sqrt{\frac{2gx}{3}} \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{2gx}{3}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2gx}{3}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{2gx}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2g}{3} \\ &= \frac{g}{3} ....(8) \end{aligned}$$

Rantai bergerak dengan percepatan konstan $a=g/3$ ke bawah.

b. Kecepatan ketika rantai pertama kali menyentuh rantai ketika $x = L$ adalah

$$v = \sqrt{\frac{2gL}{3}} \quad ....(7)$$

c. Diagram gerak rantai setelah semua rantai sudah lepas dari meja.



Gaya total yang dirasakan lantai sama dengan gaya impuls oleh elemen rantai yang menumbuk lantai ditambah gaya berat rantai yang sudah dilantai. Kecepatan ujung rantai bermassa *dm* ketika menumbuk rantai adalah $v=\sqrt{\frac{2gx}{3}}$. Impuls yang diterima lantai selama dt adalah dp = vdm. Sehingga, gaya yang diterima lantai karena ditumbuk oleh *dm* adalah

$$F_{impuls}=\frac{dp}{dt}=\frac{vdm}{dt}=\frac{v\lambda dx}{dt}=\lambda v^2=\frac{M}{L}\frac{2}{3}gx=\frac{2x}{3L}Mg \quad ....(8)$$

Berat rantai yang sudah di lantai yang panjangnya *x* adalah

$$w=\frac{x}{L}Mg \quad ....(9)$$

Gaya total yang dirasakan lantai adalah

$$N=F_{impuls}+w=\frac{2x}{3L}Mg+\frac{x}{L}Mg=\frac{5Mg}{3L}x \quad ....(10)$$

d. Percepatan setiap elemen rantai jatuh konstan, *a* = *g*/3. Persamaan kinematika ujung bawah rantai dengan *x* =0 di meja adalah

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\frac{g}{3}t^2 \quad ....(11)$$

Waktu yang dibutuhkan ujung lain rantai mencapai lantai dihitung sejak rantai mulai bergerak adalah

$$L=\frac{1}{2}\frac{g}{3}T^2$$

$$T=\sqrt{\frac{6L}{g}} \quad ....(12)$$

e. i. N = 5Mg/3

ii. N = Mg

5. *Pembahasan*:

a. Kecepatan sudut persegi adalah

$$\omega=\frac{d\theta}{dt} \quad ....(1)$$

Menurut sudut tempuh persegi,

$$\theta(t)=\sqrt{\frac{13}{3}}\tan^{-1}\left(\frac{Vt}{2a}\sqrt{\frac{3}{13}}\right)$$

$$\tan\left(\sqrt{\frac{3}{13}}\theta(t)\right)=\frac{Vt}{2a}\sqrt{\frac{3}{13}}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\tan\left(\sqrt{\frac{3}{13}}\theta(t)\right)\right\}=\frac{d}{dt}\left\{\sqrt{\frac{3}{13}}\frac{V}{2a}t\right\}$$

$$\sec^2\left(\sqrt{\frac{3}{13}}\theta(t)\right)\sqrt{\frac{3}{13}}\frac{d\theta}{dt}=\frac{V}{2a}\sqrt{\frac{3}{13}}$$

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{V}{2a}\cos^2\left(\sqrt{\frac{3}{13}}\theta(t)\right)$$

$$=\frac{V}{2a}\cos^2\left\{\tan^{-1}\left(\frac{Vt}{2a}\sqrt{\frac{3}{13}}\right)\right\}\text{..................(2)}$$

Percepatan sudut persegi adalah

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\frac{V}{2a}\cos^2\left(\sqrt{\frac{3}{13}}\theta(t)\right)\right\}$$

$$=-\frac{V}{2a}2\cos\left(\sqrt{\frac{3}{13}}\theta(t)\right)\sin\left(\sqrt{\frac{3}{13}}\theta(t)\right)\left(\sqrt{\frac{3}{13}}\frac{d\theta}{dt}\right)$$

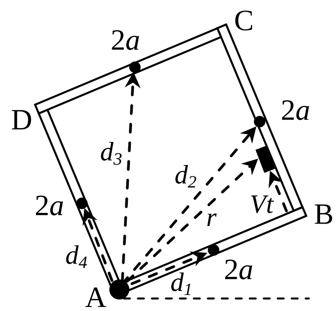
$$=-\frac{V}{2a}\sin\left(2\sqrt{\frac{3}{13}}\theta(t)\right)\sqrt{\frac{3}{13}}\frac{V}{2a}\cos^2\left(\sqrt{\frac{3}{13}}\theta(t)\right)$$

$$=-\frac{V^2}{4a}\sqrt{\frac{3}{13}}\sin\left(2\sqrt{\frac{3}{13}}\theta(t)\right)\cos^2\left(\sqrt{\frac{3}{13}}\theta(t)\right)$$

$$=-\frac{V^2}{4a}\sqrt{\frac{3}{13}}\sin\left\{2\tan^{-1}\left(\frac{Vt}{2a}\sqrt{\frac{3}{13}}\right)\right\}\cos^2\left\{\tan^{-1}\left(\frac{Vt}{2a}\sqrt{\frac{3}{13}}\right)\right\}\text{..................(3)}$$

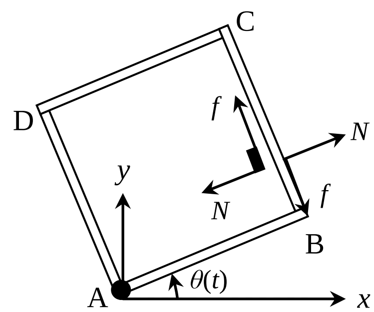
b. Momen inersia total sistem adalah jumlah momen inersia ke empat batang dan serangga. Momen inersianya dihitung menggunakan teorema sumbus sejajar sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
I_A &= I_{AB} + I_{BC} + I_{CD} + I_{DA} + I_{serangga} \\
&= \left(\frac{1}{12}mL^2 + md_1^2\right) + \left(\frac{1}{12}mL^2 + md_1^2\right) + \left(\frac{1}{12}mL^2 + md_1^2\right) + \left(\frac{1}{12}mL^2 + md_1^2\right) + mr^2 \\
&= \left\{\frac{1}{12}m(2a)^2 + ma^2\right\} + \left\{\frac{1}{12}m(2a)^2 + m\left(4a^2 + a^2\right)\right\} + \\
&\quad + \left\{\frac{1}{12}m(2a)^2 + m\left(4a^2 + a^2\right)\right\} + \left\{\frac{1}{12}m(2a)^2 + ma^2\right\} + m\left(4a^2 + V^2t^2\right) \\
&= \frac{40}{3}ma^2 + mV^2t^2 \quad \text{..................(4)}
\end{aligned}
$$



Posisi saat t

c. Diagram benda bebas untuk persegi dan serangga :



Posisi saat t

Hukum II Newton untuk rotasi persegi :

$$\sum \tau_A = I_A \alpha$$

$$-f \cdot 2a - N \cdot Vt = I_A \alpha \quad \text{..................(5)}$$

Hukum II Newton untuk serangga pada arah x adalah :

$$f \sin\theta + N\cos\theta = ma_x \quad \text{..................(6)}$$

Komponen posisi serangga pada sumbu x adalah

$$x = 2a\cos\theta - Vt\sin\theta$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -2a\sin\theta\frac{d\theta}{dt} - V\sin\theta - Vt\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \quad = -2a\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2a\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - V\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + Vt\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$= \left(Vt\sin\theta - 2a\sin\theta\right)\alpha - \omega V\cos\theta - 2a\cos\theta\,\omega^2 \quad ....(7)$$

Eliminasi *f* menggunakan persamaan (5) dan persamaan (6) untuk mendapatkan

$$N = \frac{I_A\alpha\sin\theta + 2ama_x}{2a\cos\theta - Vt\sin\theta} \quad ....(8)$$

d. Eliminasi *N* menggunakan persamaan (5) dan persamaan (6) untuk mendapatkan

$$f = \frac{I_A\alpha\cos\theta + Vtma_x}{Vt\sin\theta - 2a\cos\theta} \quad ....(9)$$

6. *Pembahasan*:

a. Misalkan: kelajuan roket di orbit rendah dan orbit tinggi ketika orbit lingkaran berturut-turut adalah v_{R_1} dan v_{R_2}, kelajuan roket di orbit rendah dan orbit tinggi ketika orbit elips berturut-turut adalah v'_{R_1} dan v'_{R_2}, massa bumi adalah *M*. Perubahan kecepatan di orbit rendah adalah

$$\Delta v_1 = v'_{R_1} - v_{R_1} \quad ....(1)$$

Torsi oleh gaya gravitasi terhadap pusat bumi sama dengan nol sehingga berlaku hukum kekekalan momentum sudut terhadap pusat bumi selama roket dalam orbit elips, yaitu

$$L_1 = L_2$$

$$\left(m - \Delta m_1\right)v'_{R_1}R_1 = \left(m - \Delta m_1\right)v'_{R_2}R_2$$

$$v'_{R_2} = \frac{R_1}{R_2}v'_{R_1} \quad ....(2)$$

Hukum kekekalan energi mekanik :

$$EM_1 = EM_2$$

$$\frac{1}{2}(m-\Delta m_1)v'^2_{R_1} - \frac{GM(m-\Delta m_1)}{R_1} = \frac{1}{2}(m-\Delta m_1)v'^2_{R_2} - \frac{GM(m-\Delta m_1)}{R_2}$$

$$v'^2_{R_1} - v'^2_{R_2} = 2GM\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$v'^2_{R_1} - \left(\frac{R_1}{R_2}v'_{R_1}\right)^2 = 2GM\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$v'_{R_1} = \sqrt{\frac{2GMR_2}{R_1(R_1+R_2)}} \quad \text{..................(3)}$$

Hukum II Newton untuk orbit rendah ketika orbit lingkaran :

$$\sum F = ma_{sp}$$

$$\frac{GMm}{R_1^2} = m\frac{v^2_{R_1}}{R_1}$$

$$GM = v^2_{R_1}R_1 \quad \text{..................(4)}$$

Jadi :

$$\Delta v_1 = v'_{R_1} - v_{R_1} = v_{R_1}\left(\sqrt{\frac{2R_2}{(R_1+R_2)}} - 1\right) \quad \text{..................(5)}$$

b. Perubahan kecepatan di orbit tinggi adalah

$$\Delta v_2 = v_{R_2} - v'_{R_2} \quad \text{..................(6)}$$

Menurut hukum II Newton untuk orbit tinggi ketika orbit lingkaran :

$$GM = v^2_{R_2}R_2$$

$$v^2_{R_1}R_1 = v^2_{R_2}R_2$$

$$v_{R_2} = v_{R_1}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \quad \text{..................(7)}$$

Kecepatan di orbit tinggi ketika orbit elips adalah

$$v'_{R_2} = \frac{R_1}{R_2}v'_{R_1} = \sqrt{\frac{2GMR_1}{R_2(R_1+R_2)}} = v_{R_1}\sqrt{\frac{2R_1^2}{R_2(R_1+R_2)}} \quad \text{..................(8)}$$

Jadi :

$$\Delta v_2 = v_{R_2} - v'_{R_2} = v_{R_1}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2R_1}{(R_1+R_2)}}\right) \quad \text{..................(9)}$$

c. Persamaan gerak roket selama membuang bahan bakar:

$$v = v_0 + u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

$$\Delta v = v - v_0 = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \Delta m}\right)$$

$$\Delta v = -u \ln\left(\frac{m_0 - \Delta m}{m_0}\right)$$

$$\frac{m_0 - \Delta m}{m_0} = e^{-\frac{\Delta v}{u}}$$

$$\Delta m = m_0\left(1 - e^{-\frac{\Delta v}{u}}\right) \quad ....(10)$$

Massa bahan bakar yang terbuang di orbit rendah :

$$\Delta m_1 = m_{01}\left(1 - e^{-\frac{\Delta v_1}{u}}\right) \quad ....(11)$$

Massa bahan bakar yang terbuang di orbit tinggi :

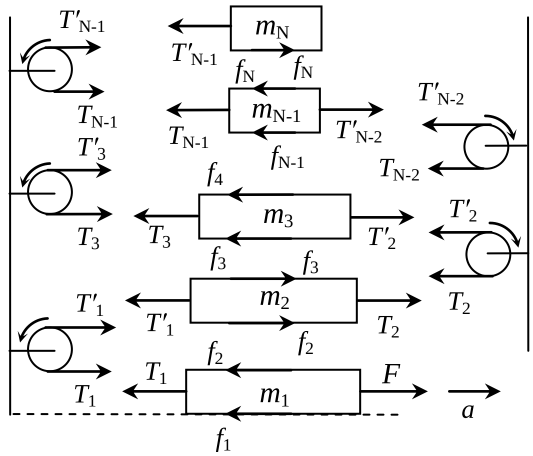
$$\Delta m_2 = m_{02}\left(1 - e^{-\frac{\Delta v_2}{u}}\right)$$

$$= m e^{-\frac{\Delta v_1}{v_f}}\left(1 - e^{-\frac{\Delta v_2}{u}}\right) \quad ....(12)$$

Nilai Δv_1 dan Δv_2 pada jawaban bagian a) dan b).

7. *Pembahasan* :

a. Diagram gerak dan diagram gaya pada setiap benda :



Setiap benda memiliki percepatan yang sama *a* terhadap lantai karena semua benda dihubungkan oleh tali yang sama. Hukum II Newton benda m_1, m_2, m_3,..., m_{N-1}, m_N berturut-turun di bawah ini :

$$\left.\begin{aligned} F - T_1 - f_1 - f_2 &= m_1 a \\ T_1' - T_2 - f_2 - f_3 &= m_2 a \\ T_2' - T_3 - f_3 - f_4 &= m_3 a \\ &\vdots \\ T_{N-2}' - T_{N-1} - f_{N-1} - f_N &= m_{N-1} a \\ T_{N-1}' - f_N &= m_N a \end{aligned}\right\} \text{.............(1)}$$

Setiap katrol memiliki percepatan sudut yang sama α karena katrol identik. Hukum II Newton gerak rotasi katrol 1, 2,3,..., N-1 berturut-turun di bawah ini :

$$\left.\begin{aligned} \left(T_1 - T_1'\right) R &= I\alpha \\ \left(T_2 - T_2'\right) R &= I\alpha \\ \left(T_3 - T_3'\right) R &= I\alpha \\ &\vdots \\ \left(T_{N-1} - T_{N-1}'\right) R &= I\alpha \end{aligned}\right\} \text{.............(2)}$$

Besar setiap gaya gesek adalah

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \mu N_1 = \mu\left(m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_{N-1} + m_N\right) g \\ f_2 &= \mu N_2 = \mu\left(m_2 + m_3 + \cdots + m_{N-1} + m_N\right) g \\ f_3 &= \mu N_3 = \mu\left(m_3 + \cdots + m_{N-1} + m_N\right) g \\ &\vdots \\ f_{N-1} &= \mu N_{N-1} = \mu\left(m_{N-1} + m_N\right) g \\ f_N &= \mu N_N = \mu m_N g \end{aligned}\right\} \text{.............(3)}$$

Asumsikan katrol tidak slip sehingga berlaku hubungan $a = \alpha R$. Jumlahkan seluruh persamaan gerak seluruh benda untuk mendapatkan

$$F+\left(T_1'-T_1\right)+\left(T_2'-T_2\right)+\left(T_3'-T_3\right)+\cdots+\left(T_{N-1}'-T_{N-1}\right)$$
$$-2\left(f_1+f_2+f_3+\cdots+f_{N-1}+f_N\right)=\left(m_1+m_2+m_3+\cdots+m_{N-1}+m_N\right)a$$
$$F-\left(N-1\right)\frac{I}{R^2}a-2\mu\left(m_1+2m_2+2m_3+\cdots+\left(N-1\right)m_{N-1}+Nm_N\right)g$$
$$=\left(m_1+m_2+m_3+\cdots+m_{N-1}+m_N\right)a$$
$$a=\frac{F-2\mu\left\{m_1+2m_2+3m_3+\cdots+\left(N-1\right)m_{N-1}+Nm_N\right\}g}{\left(m_1+m_2+m_3+\cdots+m_{N-1}+m_N+\left(N-1\right)\frac{I}{R^2}\right)} \quad \text{.............(4)}$$

Misalkan massa total benda adalah $m_1+m_2+m_3+\cdots+m_{N-1}+m_N=M$. Persamaan terakhir di atas dapat ditulis

b. Diketahui : N = 10, $m_1=m_2=m_3=\cdots=m_{N-1}=m_N=m$, I = ½ mR^2, dan a = g.

$$g=\frac{F-2\mu\left\{m+2m+3m+\cdots+9m+10m\right\}g}{\left(10m+\frac{9}{2}m\right)}$$
$$F=\left(11\mu+\frac{29}{2}\right)mg=kmg \quad \text{.............(5)}$$

dengan

$$k=11\mu+\frac{29}{2} \quad \text{.............(6)}$$

KOREKSI JAWABAN DAPAT DI EMAIL KE

davitsipayung@gmail.com