1.1. CÁLCULO VECTORIAL

1. 1. 1. INTRODUCCIÓN

La ***Mecánica*** es la parte de la Física que estudia el equilibrio y el movimiento de los cuerpos. Se divide en ***Cinemática*** que se ocupa del movimiento de los cuerpos independientemente de las fuerzas que lo producen, en ***Dinámica*** que relaciona las fuerzas con los movimientos originados por ellas y ***Estática*** o estudio del equilibrio.

En cualquiera de sus ramas, la Física busca una interpretación de todos los fenómenos naturales, siendo su objetivo descubrir y dar forma matemática a las leyes universales que relacionan entre sí las magnitudes que intervienen en aquello fenómenos. La Matemática es, por tanto el lenguaje de la Física. En este sentido, la expresión de una propiedad física en términos de números requiere un buen conocimiento de las nociones matemáticas. En este primer apartado, revisaremos las nociones de cálculo vectorial necesarias para comprender los conceptos que veremos en el estudio de Mecánica General y que servirán para cursos sucesivos.

1. 1. 2. MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

Una ***magnitud física*** es todo aquello que se puede medir: masa, volumen, temperatura, velocidad...

Hay ***magnitudes escalares*** que quedan completamente definidas por su valor numérico seguido de la unidad en que se miden. Cuando un técnico desea indicar la temperatura que en un momento dado posee un alto horno en una industria siderúrgica, bastará únicamente que indique el valor numérico de tal magnitud y la unidad elegida para su medida. No necesita ningún dato complementario para conocer perfectamente lo que desea expresar. Lo mismo sucede con otras magnitudes físicas como la masa, el volumen, el área de una superficie, la energía. Por ejemplo, en Mecánica, la duración de un fenómeno queda fijada conociendo el número que indica horas, minutos o segundos.

Otras magnitudes, sin embargo, no quedan definidas por el solo conocimiento de su medida seguida de la unidad en que se miden. Además es necesario conocer la dirección y el sentido en el que actúan. Por ejemplo, cuando se desea estudiar el movimiento de un proyectil en un disparo no basta conocer su velocidad, sino que, además es preciso concretar la dirección y el sentido de su movimiento. No es lo mismo dispara un proyectil a 100 m/s verticalmente hacia arriba, que verticalmente hacia abajo u horizontalmente. Magnitudes de este tipo son la velocidad, la fuerza, la aceleración.... y estas magnitudes se llaman ***magnitudes vectoriales.*** Para expresar las magnitudes vectoriales se hace uso de los vectores y por tanto se hace imprescindible un repaso al álgebra de vectores.

1. 1. 3. DEFINICIÓN DE VECTOR

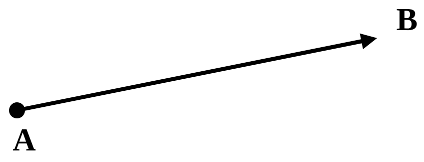
Desde un punto de vista geométrico, un vector, que representaremos simbólicamente por $\vec{v}$ es un segmento rectilíneo AB orientado. Los elementos característicos de un vector son:

- su ***origen*** o punto de aplicación (A) y extremo (B)

- ***dirección:*** la de la recta que contiene o soporta el vector (recibe el nombre de *recta soporte o recta de acción*)

- ***sentido:*** dirigido de A a B e indicado por la punta de flecha colocada en el extremo B

- ***módulo:*** medida del segmento AB



Definidos los elementos de un vector, se dice que dos vectores son ***equipolentes*** si tienen igual módulo, dirección y sentido.

1. 1. 4. CLASIFICACIÓN DE VECTORES

Los vectores se clasifican en libres, deslizantes y ligados.

- Vectores libres: son aquellos que pueden suponerse aplicados en cualquier punto del espacio. Para que dos vectores libres sean iguales, basta que sean equipolentes. Ejemplo: velocidad de los puntos de un sólido rígido animado de un movimiento de traslación.

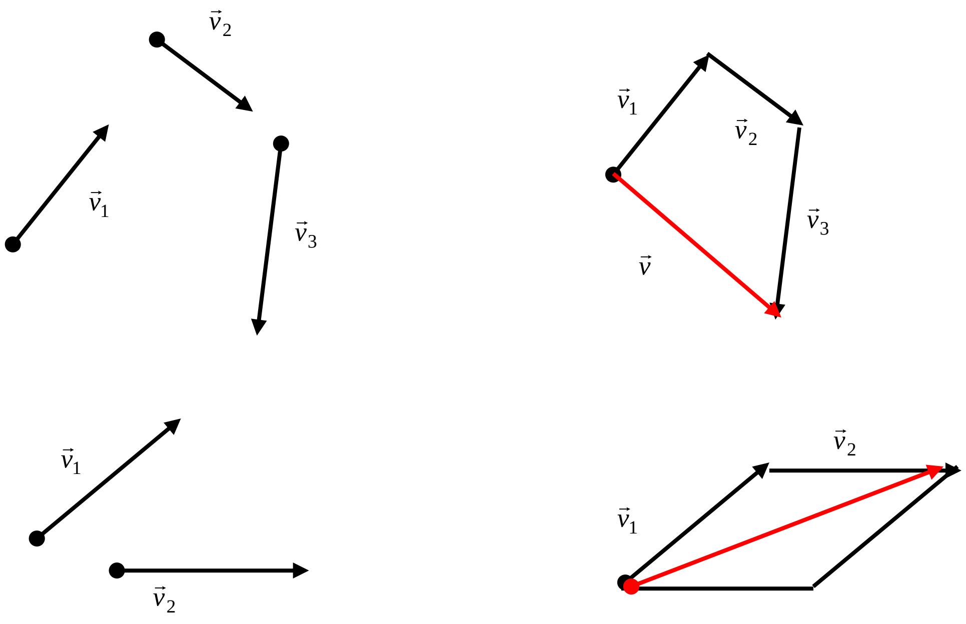
- Vectores deslizantes: pueden suponerse aplicados en cualquier punto de su recta de acción. Es decir, un vector deslizante puede sustituirse por cualquiera de los vectores equipolentes situados sobre su misma recta de acción. Si la acción de un vector deslizante no cambia si tomamos como origen cualquier punto de la recta de acción se utilizarán para representar magnitudes físicas invariantes a una traslación sobre la recta de acción.

Para que dos vectores deslizantes sean iguales, además de equipolentes, tienen que tener la misma recta de acción. Ejemplo: fuerzas sobre un sólido rígido.

- Vectores ligados (o fijos): son aquellos en los que está determinado su punto de aplicación A. Para que dos vectores ligados sean iguales, además de equipolentes, tienen que tener el mismo origen. Por tanto, representarán magnitudes vectoriales cuyo valor cambia de un punto a otro, por ejemplo la velocidad o aceleración de un punto material.

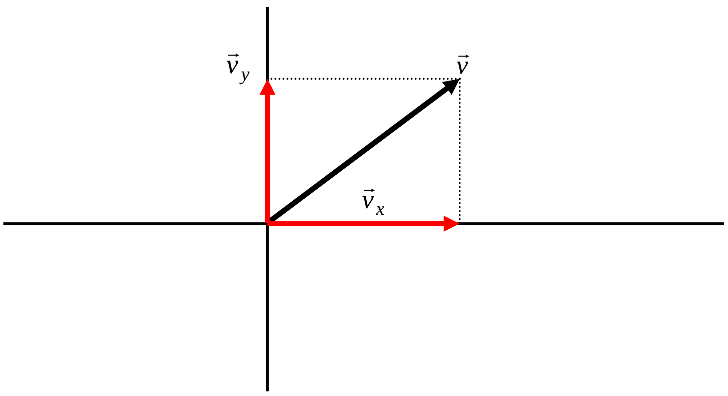
1. 1. 5. REPRESENTACIÓN ANALÍTICA Y OPERACIONES CON VECTORES LIBRES

Sean los vectores libres $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ cuya suma queremos determinar. Para ellos elegimos un punto cualquiera O, y a partir de él llevamos uno a continuación de otro vectores equipolentes (iguales) a los vectores libres dados. El vector que cierra el contorno poligonal así obtenido es por definición el vector suma de los vectores componentes. Si sólo hay dos vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, la regla anterior conocida como regla del polígono se reduce a la llamada regla del paralelogramo, que establece que la suma de dos vectores está representada por la diagonal del paralelogramo construido tomando los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ como lados.



Además de la representación gráfica de un vector libre, necesitamos una representación analítica del mismo que nos permita realizar analíticamente operaciones matemáticas como suma, resta, producto escalar, producto vectorial.... Para especificar un vector libre se proporcionan las **componentes del vector** respecto a un sistema de ejes arbitrario.

Comenzamos viendo las componentes de un vector $\vec{v}$ en el plano. Elegimos el sistema de referencia ortogonal y proyectamos el vector $\vec{v}$ sobre los ejes coordenados:



A partir del dibujo y de la regla del paralelogramo se deduce que:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

siendo $\vec{v}_x$ y $\vec{v}_y$ los vectores componentes.

Aplicando el Teorema de Pitágoras, el módulo del vector $\vec{v}$ en función de sus vectores componentes:

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_x|^2 + |\vec{v}_y|^2 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{|\vec{v}_x|^2 + |\vec{v}_y|^2}$$

Este resultado se puede trasladar al caso de tres dimensiones: Si se proyecta el vector $\vec{v}$ sobre los tres ejes cartesianos, dichas proyecciones son las aristas de un paralelepípedo cuya diagonal es el vector $\vec{v}$, por tanto:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$$

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_x|^2 + |\vec{v}_y|^2 + |\vec{v}_z|^2 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{|\vec{v}_x|^2 + |\vec{v}_y|^2 + |\vec{v}_z|^2}$$

Un **vector unitario** es un vector de módulo la unidad. Dado cualquier vector $\vec{v}$, podemos definir un vector unitario en la misma dirección y sentido de $\vec{v}$ simplemente dividiendo por su módulo:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

A partir de la definición de vector unitario, cualquier vector $\vec{v}$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$\vec{v} = |\vec{v}| \bullet \vec{u}$$

donde $\vec{u}$ indica la dirección y sentido del vector $\vec{v}$.

Designamos con las letras $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ a los vectores unitarios en las direcciones de los ejes cartesianos X, Y y Z. Según la definición de vector unitario, las proyecciones del vector $\vec{v}$ sobre los ejes cartesianos se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\vec{v}_x = |\vec{v}_x|\vec{i} = v_x\vec{i}$$

$$\vec{v}_y = |\vec{v}_y|\vec{j} = v_y\vec{j}$$

$$\vec{v}_z = |\vec{v}_z|\vec{k} = v_z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = (v_x, v_y, v_z)$$

siendo (v_x, v_y, v_z) la ***componentes cartesianas*** del vector $\vec{v}$ **.**

En la práctica, las operaciones con vectores se realizan expresándolos en términos de sus componentes cartesianas. Revisamos las operaciones básicas que se pueden realizar con vectores libres:

Sean los vectores: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

1. Suma y diferencia de vectores

$$\vec{a} \mp \vec{b} = \left[(a_x \pm b_x)\vec{i} + \left(a_y \pm b_y\right)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k} \right] = \left(a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\right)$$

La suma y diferencia de vectores verifica las propiedades conmutativa y asociativa.

2. Producto de un vector por un escalar

Es otro vector $\lambda\vec{a} = \lambda(a_x, a_y, a_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$ que tiene igual dirección que el vector $\vec{a}$ y el mismo sentido o el opuesto según que el escalar λ sea positivo o negativo.

3. Producto escalar

El producto escalar de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es un escalar que resulta de multiplicar entre sí los módulos de los vectores por el coseno del ángulo comprendido entre ambos:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$

La expresión analítica del producto escalar en función de las componentes cartesianas de los vectores:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Algunas **propiedades y aplicaciones** del producto escalar:

1) La proyección de un vector sobre otro es igual al producto escalar de los dos vectores dividido por el módulo del vector sobre el que se hace la proyección. Este hecho se entiende claramente si se considera el producto escalar de $\vec{a}$ por uno de los vectores unitarios según los ejes coordenados: $\vec{a} \bullet \vec{i} = a_x$. Donde se ve claramente que $\vec{a} \bullet \vec{i}$ es justamente la proyección de $\vec{a}$ sobre el eje X.

2) El producto escalar es conmutativo: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$

3) El producto escalar de dos vectores perpendiculares es nulo: $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

4) El producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado del módulo de dicho vector: $\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}|^2$, por tanto $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$

5) Ángulo de dos vectores:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

4. Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, denotado como $\vec{a} \times \vec{b}$ es un vector con las siguientes características:

- **Módulo:** $|\vec{v}| = |\vec{a}||\vec{b}| sen\alpha$
- **Dirección:** perpendicular al plano determinado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

- **Sentido:** regla de Maxwell (avance del tornillo o sacacorchos en el supuesto de que el primer vector vaya hacia el segundo por el camino más corto)

La expresión analítica del producto escalar en función de las componentes cartesianas de los vectores coincide con el desarrollo del siguiente determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Algunas **propiedades** del producto vectorial son las siguientes:

1) El producto vectorial es anticonmutativo: $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$
2) El producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo: $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \| \vec{b}$
3) $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| sen\alpha \Rightarrow sen\alpha = \dfrac{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$

5. Derivada de un vector

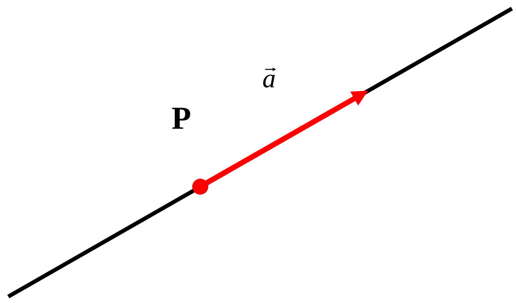
Sea un vector cuyas componentes dependen de un cierto parámetro t: $\vec{v} = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$. Se define la derivada del vector $\vec{v}$ con respecto al parámetro t como otro vector cuyas componentes son las derivadas de las componentes del vector con respecto al parámetro t: $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \left[\dfrac{dv_x(t)}{dt}, \dfrac{dv_y(t)}{dt}, \dfrac{dv_z(t)}{dt}\right]$.

1. 1. 6. REPRESENTACIÓN ANALÍTICA Y OPERACIONES CON VECTORES DESLIZANTES

a) Coordenadas o componentes de un vector deslizante

Para especificar un vector deslizante se necesita proporcionar las componentes del vector y la recta de acción. En este sentido, una forma (no exclusiva) de describir un vector deslizante es dando las componentes del vector y las coordenadas de un punto de la recta de acción :

$$(P;\vec{a}) = \left[(P_x, P_y, P_z);(a_x, a_y, a_z)\right]$$

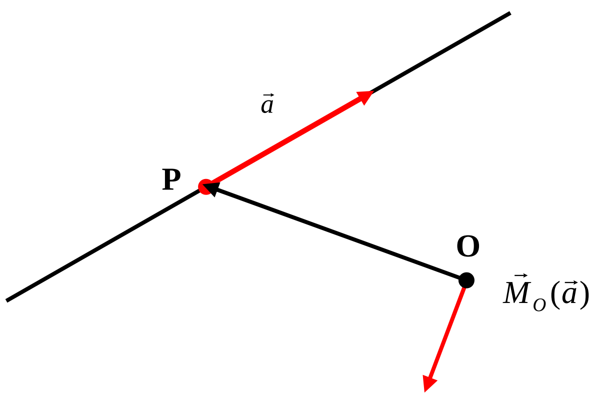


Según la definición se requieren seis parámetros para especificar un vector deslizantes. Más adelante veremos que, en realidad, los seis parámetros no son independientes y tan sólo son necesarios cinco. Dichos parámetros se denominan ***coordenadas o componentes de un vector deslizante***. Con los vectores deslizantes, podemos definir un conjunto análogo de operaciones al definido anteriormente para vectores libres. La única salvedad es que dos vectores deslizantes sólo pueden sumarse si la recta de acción es la misma o si sus rectas soportes se cortan en un punto.

b) Momento de un vector deslizante respecto a un punto

Consideremos un vector deslizante $(P;\vec{a})$ y sea $O(O_x, O_y, O_z)$ un punto arbitrario del espacio. Se define el momento del vector $\vec{a}$ respecto a P como el siguiente vector:

$$\vec{M}_O(\vec{a}) = O\vec{P} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x - O_x & P_y - O_y & P_z - O_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$



Propiedades:

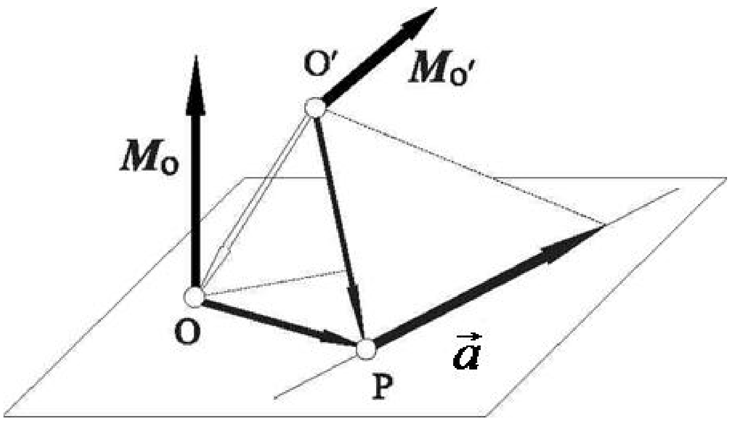
1. El vector $\vec{M}_O(\vec{a})$ es un vector ligado o aplicado en *P*. Si consideramos otro punto, en general se tiene que $\vec{M}_O(\vec{a}) \neq \vec{M}_{O'}(\vec{a})$. Por tanto, no tiene sentido hablar simplemente del momento de un vector sin hacer mención al punto respecto al que se calcula.

2. El vector $\vec{M}_O(\vec{a})$ es perpendicular al plano generado por los vectores $\vec{OP}$ y $\vec{a}$.

3. Sean O y O' dos puntos arbitrarios del espacio. Los momentos del vector $\vec{a}$ respecto a O y O' están relacionados mediante la expresión: $\vec{M}_{O'}(\vec{a}) = \vec{M}_O(\vec{a}) + \vec{O'O} \times \vec{a}$. En efecto, se verifica que:

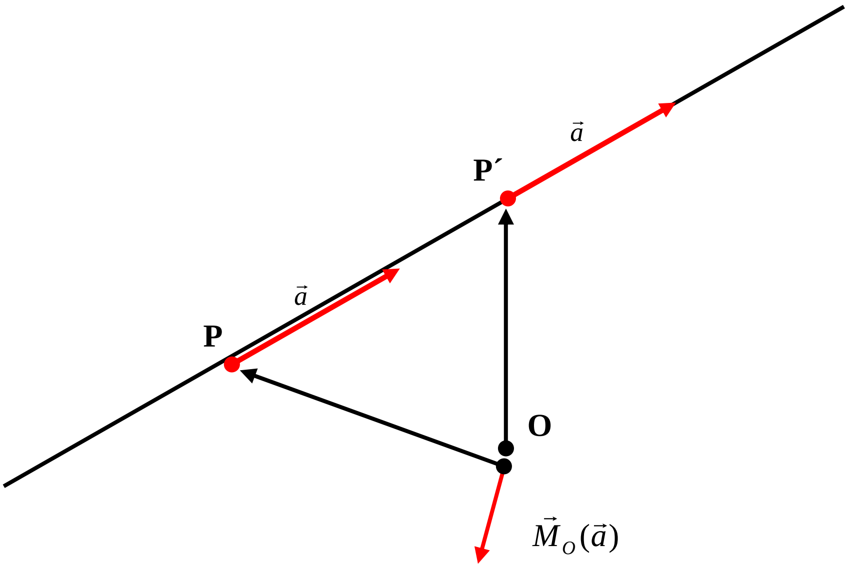
$$\vec{M}_{O'}(\vec{a}) = \vec{O'P} \times \vec{a} = (\vec{OP} + \vec{O'O}) \times \vec{a} = \vec{OP} \times \vec{a} + \vec{O'O} \times \vec{a} = \vec{M}_O(\vec{a}) + \vec{O'O} \times \vec{a}$$

donde hemos usado que $\vec{O'P} = \vec{OP} + \vec{O'O}$.



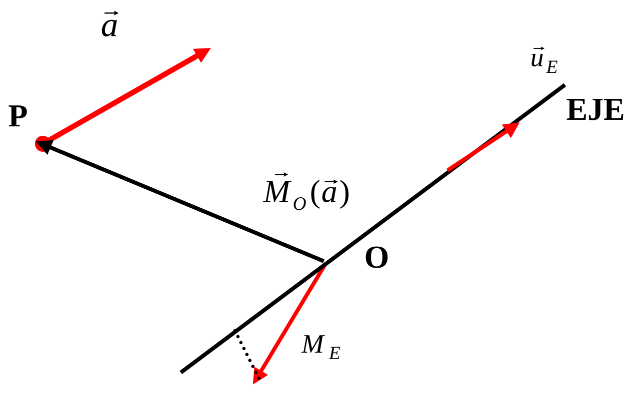
4. Por la propia definición de vector deslizante, el vector $\vec{M}_O(\vec{a})$ es independiente del punto *P* que tomemos sobre la recta de acción. En efecto, consideremos otro punto P' sobre la recta de acción y designemos por $\vec{M}'_O(\vec{a})$ al momento respecto al punto *O:*

$$\vec{M}'_O(\vec{a}) = O\vec{P}' \times \vec{a} = (O\vec{P} + P\vec{P}') \times \vec{a} = O\vec{P} \times \vec{a} + P\vec{P}' \times \vec{a} = O\vec{P} \times \vec{a} = \vec{M}_O(\vec{a})$$



c) Momento de un vector deslizante respecto a un eje

Se define como la proyección sobre dicho eje del momento de ese vector respecto a un punto cualquiera del eje. Matemáticamente dicha proyección (magnitud escalar) se calcula: $M_E = \mathrm{Proy}\vec{M}_O(\vec{a}) = \vec{M}_O(\vec{a}) \bullet \vec{u}_E$, siendo $\vec{u}_E$ un vector unitario a lo largo de la dirección del eje.



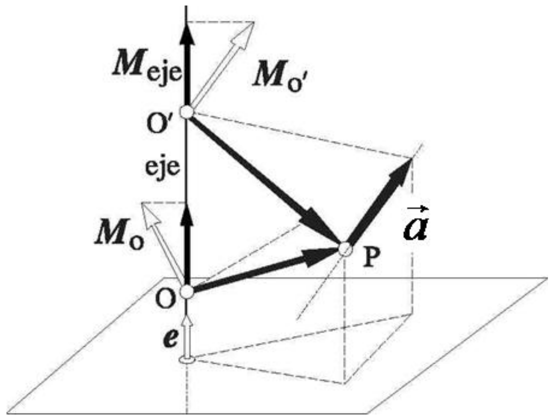
Por las características de un vector deslizante, el valor del momento respecto a un eje debe ser independiente del punto *O* que tomemos sobre el eje:

$$M_E{}' = \vec{M}_{O'}(\vec{a}) \bullet \vec{u}_E$$

$$M_E = \vec{M}_O(\vec{a}) \bullet \vec{u}_E$$

$$M_E{}' - M_E = (\vec{M}_{O'}(\vec{a}) \bullet \vec{u}_E) - (\vec{M}_O(\vec{a}) \bullet \vec{u}_E) = (\vec{M}_{O'}(\vec{a}) - \vec{M}_O(\vec{a})) \bullet \vec{u}_E \Rightarrow$$
$$\left[(\vec{O'O} \times \vec{a}) + \vec{M}_O(\vec{a}) - \vec{M}_O(\vec{a})\right] \bullet \vec{u}_E = \left[(\vec{O'O} \times \vec{a})\right] \bullet \vec{u}_E = 0 \Rightarrow M_E{}' = M_E$$

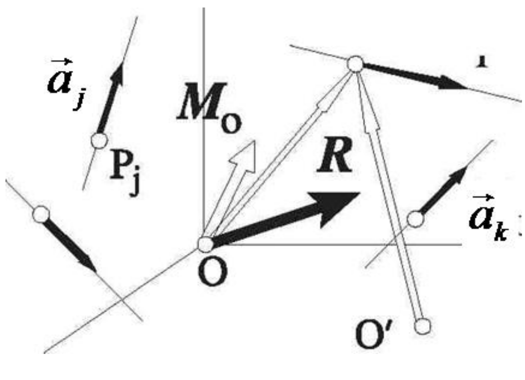
puesto que $(\vec{O'O} \times \vec{a}) \perp \vec{O'O}, \vec{u}_E$.



1. 1. 7. SISTEMAS DE VECTORES DESLIZANTES

a) Definición

Se define un sistema de vectores deslizantes como un conjunto de vectores deslizantes.



Dado un sistema de vectores deslizantes $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, ...\vec{a}_n\}$, se define la ***resultante*** de dicho sistema como el *vector libre* calculado de la siguiente manera:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$$

Se define ***momento resultante*** del sistema respecto a un punto O al *vector ligado* resultado de sumar los momentos, respecto a dicho punto, de los vectores del sistema:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{a}_i)$$

Para obtener el momento resultante de un sistema de vectores deslizantes, respecto a un punto O´, conociendo su momento $\vec{M}_O$ respecto a un punto O, basta sumar a $\vec{M}_O$ el momento respecto a O´ de la resultante supuesta aplicada en el punto O. Lo demostramos:

$$\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{O'}(\vec{a}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{O'P} \times \vec{a}_i) = \sum_{n=1}^{n} \left[(\vec{O'O} + \vec{OP}) \times \vec{a}_i\right] = \sum_{n=1}^{n} \left[\vec{O'O} \times \vec{a}_i\right] + \sum_{n=1}^{n} \left[\vec{OP} \times \vec{a}_i\right] = \vec{O'O} \times \sum_{n=1}^{n} \vec{a}_i + \sum_{n=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{a}_i)$$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{O'O} \times \vec{R} + \vec{M}_O$$

b) Invariantes de un sistema de vectores deslizantes

Dado un sistema de vectores deslizantes, el conjunto de todos los vectores momentos definidos en todos y cada uno de los puntos del espacio se denomina *campo de momentos*. Conocida la resultante $\vec{R}$ y el momento en un punto O, $\vec{M}_O$ queda completamente definido el campo de momentos generado por el sistema. Por tanto, es posible sustituir el sistema de vectores deslizantes inicial por el par $\{\vec{R}, \vec{M}_O\}$ que se denomina *torsor del sistema de vectores en el punto O*. Al punto O suele denominarse *centro de momentos.*

Se llama **invariante** de un sistema de vectores deslizantes aquella magnitud que permanece constante (invariante) cuando se cambia el *centro de momentos.* Los dos invariantes básicos de un sistema de vectores deslizantes son:

1. **La resultante** $\vec{R}$**.** En su definición no aparece el centro de momentos. Este invariante se denomina invariante vectorial.

2. **El producto escalar** $\vec{M}_O \bullet \vec{R}$. Sean O y O´ dos puntos arbitrarios, entonces:

$$\vec{M}_{O'} \bullet \vec{R} = (\vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{R}) \bullet \vec{R} = \vec{M}_O \bullet \vec{R} + (\vec{O'O} \times \vec{R}) \bullet \vec{R} = \vec{M}_O \bullet \vec{R}$$

por tanto $\vec{M}_{O'} \bullet \vec{R} = \vec{M}_O \bullet \vec{R}$ ya que $(\vec{O'O} \times \vec{R}) \bullet \vec{R} = 0$ puesto que $(\vec{O'O} \times \vec{R}) \perp \vec{R}$**.** A este invariante se le denomina invariante escalar y también recibe el nombre de ***automomento.***

A partir de estos dos invariantes se pueden definir otros. Uno de ellos es la proyección de $\vec{M}_O$ sobre la resultante $\vec{R}$**.** Si llamamos *m* a dicha proyección, entonces:

$$m = \vec{M}_O \bullet \vec{u}_R = \vec{M}_O \bullet \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{\vec{M}_O \bullet \vec{R}}{|\vec{R}|}$$

de donde se deduce que *m* es un invariante ya que lo son el numerador y el denominador. El escalar *m* se denomina ***momento mínimo*** del sistema de vectores deslizantes. También suele definirse el ***vector momento mínimo***, $\vec{m}$ que es un vector cuyo módulo es *m* y cuya dirección y sentido coinciden con los de la resultante. Matemáticamente se expresa como $\vec{m} = m \cdot \vec{u}_R$, siendo $\vec{u}_R$ un vector unitario en la dirección de $\vec{R}$. El módulo del vector momento mínimo es menor (o igual) que el módulo de cualquiera de los vectores del campo de momentos del sistema de vectores deslizantes:

$$\vec{m} = m \bullet \vec{u}_R \Rightarrow |\vec{m}| = m = \frac{|\vec{M}_O \bullet \vec{R}|}{|\vec{R}|} = \frac{M_O \cdot R \cdot |\cos\alpha|}{R} = M_O|\cos\alpha| \leq M_O \quad \forall O$$

siendo $\cos\alpha$ el ángulo formado por los vectores $\vec{M}_O$ y $\vec{R}$.

c) Eje Central

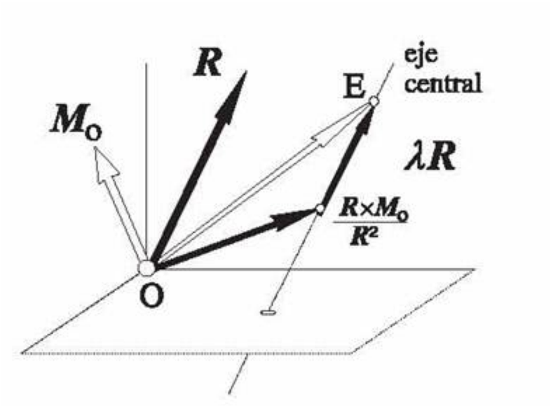
Acabamos de ver que el vector momento varía de un punto a otro. Se denomina ***eje central*** de un sistema de vectores deslizantes al lugar geométrico de los puntos del espacio en los que el vector momento resulta ser el vector momento mínimo $\vec{m} = m \cdot \vec{u}_R$. El momento mínimo tiene la dirección de $\vec{R}$, por tanto, el eje central es el lugar geométrico de los puntos en los que el vector momento $\vec{M}_O$ es paralelo a $\vec{R}$.

Vamos a comprobar que el eje central es una recta:

Supongamos que C es un punto del eje central, entonces $\vec{M}_C = \vec{m} = m \cdot \vec{u}_R$. Sea Q un punto arbitrario. El momento respecto a Q vendrá dado por $\vec{M}_Q = \vec{M}_C + \vec{QC} \times \vec{R}$. Para que Q pertenezca al eje central debe cumplirse que $\vec{M}_Q = \vec{M}_C = \vec{m}$, de manera que $\vec{QC} \times \vec{R} = 0 \Rightarrow \vec{QC} \| \vec{R}$. Por tanto, ***el eje central es una recta paralela a*** $\vec{R}$.

Si para un punto C del eje central, $\vec{M}_C \| \vec{R}$ y cuando dos vectores son paralelos sus componentes son proporcionales, se sigue que la ecuación del eje central es:

$$\vec{M}_C = \lambda\vec{R} \Rightarrow (M_x, M_y, M_z) = \lambda(R_x, R_y, R_z) \Rightarrow \frac{M_x}{R_x} = \frac{M_y}{R_y} = \frac{M_z}{R_z}$$



A partir de la definición de eje central se pueden deducir algunas propiedades de simetría del *campo de momentos* de un sistema de vectores deslizantes:

1. El momento resultante de un sistema de vectores deslizantes presenta igual módulo en puntos situados a igual distancia del eje central.

El momento resultante $\vec{M}_O$ de un sistema de vectores deslizantes respecto a un punto arbitrario O puede escribirse en función del momento mínimo de un punto del eje central como $\vec{M}_O = \vec{m} + \vec{OC} \times \vec{R}$. Dado que $\vec{R}$ es un vector libre, el ángulo formado por los vectores $\vec{OC}$ y $\vec{R}$ y la distancia *OC* son magnitudes constantes para puntos situados a igual distancia del eje central por lo que en todos estos puntos $\left|\vec{M}_O\right| = cte$, aunque no la dirección y sentido de dicho vector ya que cambia el plano definido por $\vec{OC}$ y $\vec{R}$. ***El módulo del momento resultante es constante en todos los puntos situados sobre una superficie cilíndrica coaxial con el eje central. Esto es, el campo de momentos presenta simetría cilíndrica respecto al eje central.***

2. El momento resultante de un sistema de vectores deslizantes es igual (módulo, dirección y sentido) en puntos de una recta paralela al eje central. En tales puntos, además de las condiciones descritas en el apartado anterior se verifica que es el mismo el plano, por tanto el vector producto vectorial, definido por los vectores $\vec{OC}$ y $\vec{R}$.

d) Momento de un sistema de vectores deslizantes respecto a un eje

Se define como la proyección sobre el eje del momento resultante de un sistema de vectores deslizantes respecto a un punto cualquiera del eje. Coincide con la suma de los momentos de cada uno de los vectores deslizantes respecto al eje:

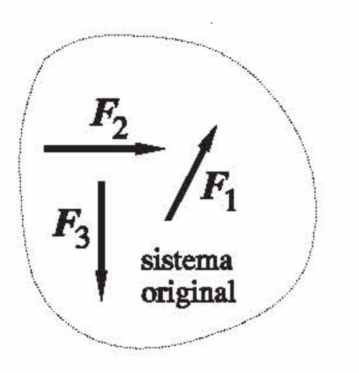
$$M_E = \vec{M}_O \bullet \vec{u}_E = (\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{a}_i)) \bullet \vec{u}_E = \sum_{i=1}^{n} (\vec{M}_O(\vec{a}_i) \bullet \vec{u}_E) = \sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{a}_i)$$

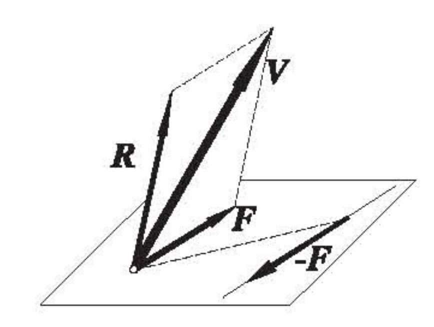
1. 1. 8. REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE VECTORES DESLIZANTES

Dos sistemas de vectores deslizantes son iguales si contienen exactamente los mismos vectores. Sin embargo, la condición necesaria y suficiente para que dos sistemas sean equivalentes es que tengan la misma resultante y el mismo momento respecto de un punto dado.

Una reducción de un sistema de vectores es otro sistema de vectores que sea equivalente y resulte más sencillo de manejar. La reducción más general consiste en tres vectores, uno de ellos coincide con la resultante pasando por un punto cualquiera O del espacio y los otros dos forman un par de vectores de momento igual al momento resultante del sistema respecto al punto O.

$$Teorema:\left\{\vec{F}_1,\vec{F}_2........\vec{F}_n\right\}\Rightarrow\left\{\vec{R},\vec{F},-\vec{F}\right\}$$

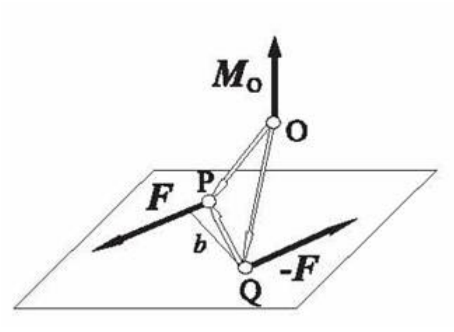




Cuando el punto O es un punto del eje central se denomina reducción canónica del sistema de vectores deslizantes. En el caso en el que $\vec{M}_O \bullet \vec{R} = 0$ siendo $\vec{R} \neq 0$ la reducción más sencilla es la resultante aplicada en un punto del eje central. Si tenemos el caso en que $\vec{R} = 0$ y $\vec{M}_O \neq 0$, la reducción más sencilla es un par que proporcione ese momento.

NOTA. Características del campo de momentos creado por un par de vectores

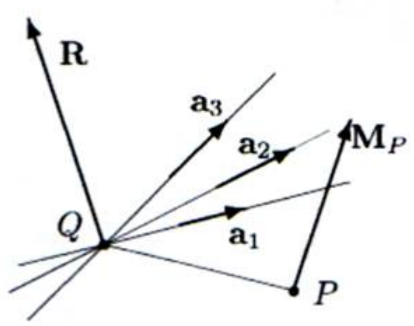
$$\vec{M}_O = O\vec{P}\times\vec{F} + \vec{O}Q\times(-\vec{F}) = Q\vec{P}\times\vec{F}$$



1.1.9. SISTEMAS DE VECTORES CONCURRENTES

Si el sistema de vectores deslizantes es ***concurrente***, esto es, si las rectas de acción de todos los vectores se cortan en un punto común Q, el momento respecto a dicho punto de intersección $\vec{M}_Q$ es nulo. En este caso, la expresión del cálculo de momentos se reduce a:

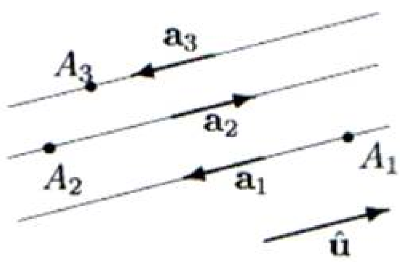
$$\vec{M}_P = P\vec{Q} \times \vec{R}$$



que constituye el denominado ***teorema de Varignon*** que dice que el momento de un sistema de vectores deslizantes concurrentes en Q respecto a un punto arbitrario P es igual al momento de la resultante, aplicada en Q, respecto al punto P. En cualquier punto P, es fácil comprobar que el automomento es cero $\vec{M}_P \bullet \vec{R} = 0$ ya que según el teorema de Varignon se tiene que $\vec{M}_P \perp \vec{R}$. Si el momento mínimo es nulo, la reducción canónica del sistema se reduce a $\vec{R}$ aplicada en un punto del eje central, esto es en Q.

1. 1. 10. SISTEMAS DE VECTORES PARALELOS

Un sistema de vectores paralelos es aquel en el que sus rectas de acción son paralelas entre sí.



Sea $\vec{u}$ un vector unitario en la dirección de las rectas de acción. Los vectores paralelos se pueden expresar como:

$$\vec{a}_i = \lambda_i \vec{u}$$

siendo $\lambda_i = \pm|\vec{a}_i| = \pm a_i$ donde el signo indica que $\vec{a}_i$ tiene el mismo sentido o sentido opuesto que $\vec{u}$ .Y por tanto, la resultante: $\vec{R} = \vec{u}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$.

Algunas propiedades:

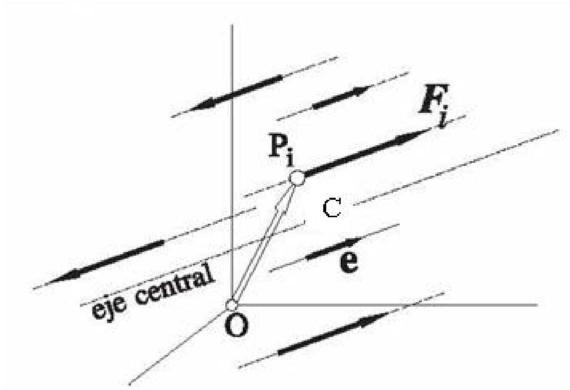
- En cualquier punto O, el automomento es cero: $\vec{M}_O \bullet \vec{R} = 0 \Rightarrow \vec{M}_O \perp \vec{R}$. Es fácil comprobarlo:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n}(\vec{OP_i} \times \vec{a}_i) = \sum_{i=1}^{n}(\vec{OP_i} \times \lambda_i\vec{u}) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\vec{OP_i} \times \vec{u}) \Rightarrow \vec{M}_O \perp \vec{u}$$

$$\text{Si } \vec{R}\parallel\vec{u} \Rightarrow \vec{M}_O \perp \vec{R}$$

- El momento mínimo es nulo, por tanto la reducción canónica del sistema de vectores paralelos se reduce a $\vec{R}$ aplicada en un punto del eje central

- Consideremos ahora los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$............$\vec{a}_n$ ligados a puntos P_1, P_2, P_3........P_n de sus rectas de acción.



Se escoge un sistema de referencia de origen O y sean $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$.........$\vec{r}_n$ los vectores de posición de los vectores (dirigidos desde O hasta P_i). Denominamos $\vec{r}$ al vector de posición respecto de O de un punto cualquiera del eje central C en el que suponemos aplicada la resultante $\vec{R}$ a la que se reduce el sistema. Por ser $\vec{R}$ equivalente al sistema de vectores paralelos, su momento respecto al origen O del sistema de referencia debe coincidir con el momento resultante del sistema respecto a este punto, esto es:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{R} = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \lambda_i\vec{u} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{r}_i \times \vec{u}$$

$$\vec{r} \times \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u} = \vec{r} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \times \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{r}_i \times \vec{u} \Rightarrow \left[\vec{r} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{r}_i \right] \times \vec{u} = 0$$

Expresión que solo se verificará si el vector diferencia del paréntesis es paralelo a $\vec{u}$:

$$\vec{r} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{r}_i \| \vec{u} \Rightarrow \vec{r} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{r}_i = k\vec{u} \Rightarrow \vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} + m\vec{u}$$

siendo m un número arbitrario, y para cuyos diversos valores obtendremos puntos de una recta, una recta que es el eje central. El vector de posición de unos de los puntos del eje central viene dado por la expresión:

$$O\vec{C} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{r}_i}{R}$$

a este punto se le llama ***centro de momentos del sistema de vectores paralelos.***

En resumen, el centro de momentos de un sistema de vectores paralelos aplicados tiene dos propiedades importantes:

1. Está contenido en el eje central del sistema de vectores

2. El momento del sistema de vectores paralelos respecto a un punto Q se puede escribir de la siguiente manera:

$$\vec{M}_Q = Q\vec{C} \times \vec{R} + \vec{M}_C = Q\vec{C} \times \vec{R}$$

puesto que si el punto C pertenece al eje central $\vec{M}_C = \vec{m} = 0$.

Si el parámetro λ_i representa la masa m_i de las partículas de un sistema material, C es el denominado ***centro de masas***.