Theoretische Physik 1b: Mechanik
Übungsblatt 1

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Dr. Michael Marthaler
Andrii Sokolov, M.Sc.

SS 2018 **Abgabe 16.04.2018**

***Info**: Bitte schreiben Sie Name und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt und tackern Sie dieses. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.*

Aufgabe 1: Variablentrennung (*10 Punkte*)

Seperation der Variablen ist eine Methode zur Lösung von Differentialgleichungen. Betrachten Sie folgende Differentialgleichung:

$$M(x)N(y)\,\mathrm{d}x \;+ P(x)Q(y)\,\mathrm{d}y \;= 0$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung so umgeschrieben werden kann, dass die linke Seite nur von y und die rechte Seite nur von x abhängt. (*2 Punkte*)

(b) Integration beider Seiten bietet eine Familie von Lösungen. Um eine vollständige Lösung zu finden, überprüfen Sie, ob $P(x) = 0$ oder $N(y) = 0$ die Gleichung erfüllen. Wenden Sie die Methode auf folgende Gleichung an

$$xy\,\mathrm{d}x \;+ (x+1)\,\mathrm{d}y \;= 0$$

Zeigen Sie, dass die Lösung einen freien Parameter beinhaltet. (*6 Punkte*)

(c) Der letzte Schritt dieser Methode ist die Bestimmung der freien Parameter mittels Anfangsbedingungen. Wie ist die endgültige Lösung für $y(0) = \alpha$? (*2 Punkte*)

Aufgabe 2: Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (*11 Punkte*)

Betrachten Sie eine sich entlang der x-Achse bewegende Masse m an einer Feder mit Federkonstante k, wobei an der Masse die Reibungskraft $F_F = -2\alpha\dot{x}$ angreift.

(a) Leiten Sie mithilfe des zweiten Newtonschen Gesetzes die Bewegungsgleichung her. (*1 Punkt*)

(b) Die Bewegungsgleichung ist die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung. Schlagen Sie einen Lösungsansatz vor und verifizieren Sie diesen. (*2 Punkte*)

$$\ddot{x} + \frac{2\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

wobei $\dot{x}$ die erste und $\ddot{x}$ die zweite Ableitung nach der Zeit bezeichnen.

(c) Bestimmen Sie mithilfe Ihres Ansatzes das charakteristische Polynom dieser Gleichung und bestimmen Sie dessen Nullstellen. (*2 Punkte*)

(d) Nehmen Sie eine starke Dämpfung des Systems an, d.h. $\Delta = \sqrt{\frac{\alpha^2}{m^2} - \frac{k}{m}}$ ist reell. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung in Abhängigkeit von zwei Konstanten A und B. (*4 Punkte*)

(e) Nutzen Sie die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 2$, um diese Konstanten zu bestimme.
(*2 Punkte*)

Aufgabe 3: Vektorfelder (*13 Punkte*)

Berechnen Sie den Gradienten $\nabla\varphi$ der folgenden Skalarfelder φ:

(a)

$$\varphi(x, y) = x \sin y + y \cos x$$

(*1 Punkt*)

(b)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|}, \quad \text{mit } \vec{r} \text{ ein dreidimensionaler Vektor}$$

(*3 Punkte*)

(c) Ein Vektorfeld, welches durch den Gradienten $\nabla\varphi$ eines Skalarfeldes φ gegeben ist, nennt man Gradientenfeld oder konservatives Feld. Ein solches Feld erfüllt die Integralidentität $\oint_L \nabla\varphi(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$, wobei die Integration über einen geschlossenen Weg L geht. Geben Sie eine Version in differentieller Form dieser Identität an. An welche physikalischen Beispiele von Potentialfeldern können Sie sich erinnern? (*2 Punkte*)

Überprüfen Sie, ob folgende Vektorfelder konservativ sind:

(d)

$$\vec{V}(x, y) = \hat{e}_x \Big(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{\cos y}{2\sqrt{x^3 y}} \Big) + \hat{e}_y \Big(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3}{y^3}} - \frac{\sin y}{\sqrt{xy}} - \frac{\cos y}{2\sqrt{xy^3}} \Big), \quad \text{mit } x, y > 0$$

(*3 Punkte*)

(e)

$$\vec{V}(\vec{r}) = \vec{l} \times \vec{r},$$

wobei $\vec{l} = \text{const}$ und $\vec{r}$ dreidimensionale Vektoren sind. (*4 Punkte*)

Aufgabe 4: Integration (*6 Punkte*)

Berechnen Sie die Integrale

(a)

$$\int \mathrm{d}x \; x \ln x$$

(*2 Punkte*)

(b)

$$\int \mathrm{d}x \; \frac{x}{x^2 + 1}$$

(*1 Punkt*)

(c)

$$\int_0^t \mathrm{d}t' \; \dot{x}(t') \sin \frac{2\pi x(t')}{x_0},$$

wobei x_0 eine Konstant, $x(t)$ eine Funktion der Zeit t, und $\dot{x}(t)$ die Ableitung nach der t bezeichnen. (*3 Punkte*)