2020 9월 4일(수) 교육과정 평가원 해설지 대동학원

수학 과목 (가형)

1. 정답 : ⑤

해설 : $\vec{a}=(1,0),\ \vec{b}=(1,1)$

$\vec{a}+2\vec{b}=(3,2)$ 성분의 합은 5

2. 정답 : ①

해설 : $\lim\limits_{\to 0}\dfrac{e^{6x}-e^{4x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{6x}-1-(e^{4x}-1)}{2x}=\dfrac{6-4}{2}=1$

3. 정답 : ③

해설 : $(a,4,-9), B(1,0,-3)$에서 $3:1$외분점은 $\left(\dfrac{3-a}{2},-2,0\right)$ 이점이

y축위에 있으므로 $\dfrac{3-a}{2}=0\ \ \therefore a=3$

4. 정답 : ②

해설 : 두 자리의 자연수가 2의배수 십의자리수가 6의 약수이면

일의 자리수 : 0, 2, 4, 6, 8

십의 자리수 : 1, 2, 3, 6

$\therefore 5\times 4=20$

5. 정답 : ④

해설 : $P(A)=\dfrac{2}{5}$, $P(B^c)=\dfrac{3}{10}$, $P(A\cap B)=\dfrac{1}{5}$이므로 확률의 덧셈정리에 의해서

$P(A\cup B)=\dfrac{2}{5}+\dfrac{7}{10}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{9}{10}$

$P(A^c/B^c)=\dfrac{P(A^c\cap B^c)}{P(B^c)}=\dfrac{P(A\cup B)^c}{P(B^c)}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\dfrac{1}{3}$

6. 정답 : ④

해설 : $x = \cos y + x\sin y$

$(0, \frac{\pi}{3})$에서의 접선의 기울기는

음함수의 미분에 의하여

$\pi = -\sin y \times \frac{dy}{dx} + \sin y + x \times \cos y \times \frac{dy}{dx}$

$x = 0,\ y = \frac{\pi}{3}$를 대입하면 $\frac{dy}{dx} = 1 - \pi$

7. 정답 : ②

해설 : $(2+x)\ (1+3x)^2$의 전개식에서 x의 계수

$(2+x)^4$ 일반항 $_{4}\ _{r} \times 2^{4-r} \times x^r$, $(1+3x)^3$의 일반항 $_{3}C_{a} \times 3^a \times x^a$

$_{4}C_{r} \times 2^{4-r} \times x^r \ \times {}_{3}C_{a} \times 3^a \times x^a$에서

$r + a = 1$이면 $(a, r) = (0,1) \rightarrow {}_{4}C_{1} \times 2^3 = 32$

$(1,0) \rightarrow {}_{3}C_{1} \times 3^1 \times 2^4 = 144$

$\therefore 32 + 144 = 176$

8. 정답 : ⑤

해설 : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(e+h) - f(e-2h)}{h} = 3f'(e)$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times \pi^2 - 2x \times \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$

$f'(e) = -\frac{1}{e^3}$ $\quad \therefore 3f'(e) = -\frac{3}{e^3}$

9. 정답 : ③

해설 : $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$\cos\theta = -\frac{3}{5}$ 일 때, $\sin\theta = \frac{4}{5}$

$\cos(\pi + \theta) = \frac{1}{\sin(\pi + \theta)} = -\frac{1}{\sin\theta} = -\frac{5}{4}$

10. 정답 : ⑤

해설 : 1부터 7까지 3개를 선택하는 방법은 $_3$ 35

선택된 3개 수의 곱 a, 나머지 4개의 수의 공 b

a와 b가 모두 짝수일 확률

여사건을 이용하면

a가 홀수: $_4C_3$, b가 짝수 : $_4C_4$ $\therefore 4\times1=4$

a가 짝수: $_3C_3$, b가 홀수 : $_4C_4$ $\therefore 1\times1=1$

$\frac{5}{35}=\frac{1}{7}\ \therefore 1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$

11. 정답 : ④

해설 : $(x)=(x\ \ -3)e^{-x}$

$f'(x)=(-x^2+2x+3)e^{-x}$

$f'(x)=-(x-3)(x+1)e^{-x}=0$

그래프 개형에 의하여

극대 $f(3)=\frac{6}{e^3}$

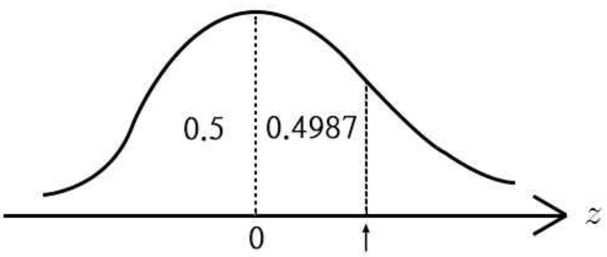
극소 $f(-1)=-2e$

$\therefore\ f(3)\times f(-1)=\frac{6}{e^3}(-2e)=-\frac{12}{e^2}$

12. 정답 : ④

해설 : $m,\ \frac{m}{3}\Big)^2\Big)$

$$P\left(X\le\frac{9}{2}\right)=P\left(z\le\frac{\frac{9}{2}-m}{\frac{m}{3}}\right)=0.9987$$



$$\frac{\frac{9}{2}-m}{\frac{m}{3}}=3$$

$\therefore m=\frac{9}{4}$

13. 정답 : ①

해설 : $(x)=ke\ \ +1,\quad g(x)=x^2-3x+4$로 두면

교점 $(t,\ f(t))=P(t,\ g(t))$

$ke^x+1=x^2-3x+4$------①

교점에서의 접선이 수직이므로

$f'(t)\times g'(t)=-1$

$ke^t\times(2x-3)=-1$

$ke^t=\dfrac{-1}{2x-3}$

①식에 대입하면

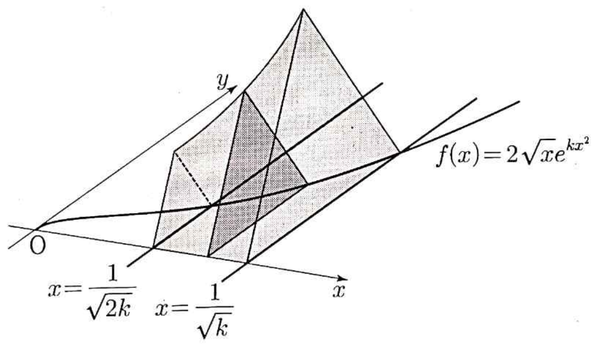
$\dfrac{-1}{2x-3}+1=x^2-3x+4$

$t=1$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{e}$

14. 정답 : ③

해설 :



그림에서 한변이 $2\quad x\,e^{kx}$ 이므로

정삼각형의 넓이 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\ \ 2\sqrt{x}\,e^{kx^2})^2=xe^{2kx^2}$

부피 $V=\quad {}^{\frac{1}{\sqrt{k}}}_{\frac{1}{2k}}\ Sdx=\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2k}}}^{\frac{1}{\sqrt{k}}}\sqrt{3}\,xe^{2kx^2}dx$

$2kx^2=t$로 치환하면 $4kxdx=dt$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$ 이면 $t=1$

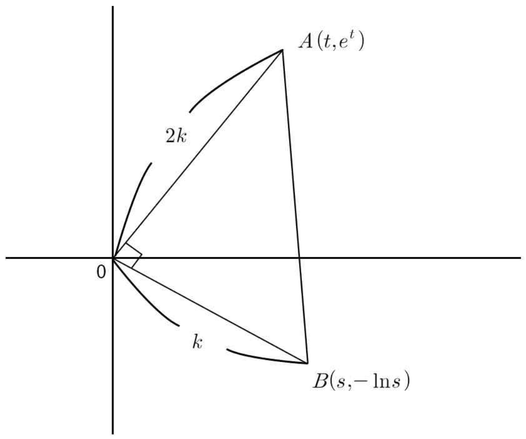
$x=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$이면 $t=2$

$V=\displaystyle\int_1^2\sqrt{3}\,e^t\,\frac{1}{4k}\,dt=\frac{\sqrt{3}}{4k}(e^2-e)=\sqrt{3}\,(e^2-e)$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{4}$

15. 정답 : ③

해설 :



1) $s - e\ .\ln s = 0 \Leftrightarrow \ln s = \frac{t}{e^t} \cdot s \quad (\frac{t}{e^t} = k \Rightarrow \ln s = ks)$

2) $2\quad s^2 + (\ln s)^2 = \sqrt{t^2 + e^{2t}}$

$\Leftrightarrow 4(s^2 + (\ln s)^2) = t^2 + e^{2t}$

$\Leftrightarrow 4(s^2 + k^2 s^2) = k^2 e^{2t} + e^{2t}$

$\Leftrightarrow 4s^2(k^2+1) = e^{2t}(k^2+1)$

따라서 $4s^2 = e^{2t} \Rightarrow s = \frac{1}{2}e^t$ ...1)에 대입하면

$t \cdot \frac{1}{2}e^t - e^t \cdot \ln\frac{1}{2}e^t = 0$

$\Rightarrow \frac{t}{2} - (\ln\frac{1}{2} + t) = 0$

$\Rightarrow \frac{t}{2} - t = -\ln 2 \qquad \therefore t = 2\ln 2$

16. 정답 : ④

해설 : $3,\ 0,\ 0),\ B(0,\ 3,\ 0),\ C(0,\ 2,\ 1)$을 지나는 평면의 방정식은

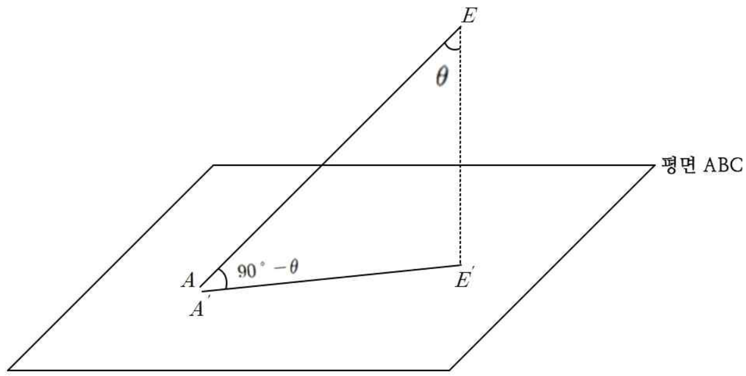
$x+y+z-3=0$이고 법선 벡터는 $\vec{h}=(1,\ 1,\ 1)$

점 $C(0,\ 2,\ 1)$와 $D\left(0,\ -\frac{5}{2},\ -2\right)$을 2;1로 내분한점 $E(0,\ -1,\ -1)$

AE직선의 방정식은 $\frac{x-3}{3}=y=z$의 방향벡터는 $\vec{d}=(3,\ 1,\ 1)$

선분 $AE=\ \ 9+1+1=\sqrt{11}$

$\vec{d}=(3,\ 1,\ 1)$와 $\vec{h}=(1,\ 1,\ 1)$이루는 각을 θ라 하면



$\vec{d}\circ\vec{h}=|\vec{d}||\vec{h}|\cos\theta$에서 $\cos\theta=\frac{5}{\sqrt{33}}$ 에서 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}}$

평면과 직선이 이루는 각은 $90\ \ -\theta$

$\overline{AE}$의 정사형을 $A'B'$이라두면

$\cos(90^{\circ}-\theta)=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

$\overline{A'B'}=\overline{AB}sin\theta=\sqrt{11}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

17. 정답 : ②

해설 : ${}_{1}^{1}\; f(x))^{2}g'(x)dx = [(f(x)^{2})g(x)]_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} f(x)f'(x)g(x)dx = 120$

$f(x)g(x) = x^4 - 1$ 에서 $f(1)g(1) = 0$, $f(-1)g(-1) = 0$ 이므로

$$\int_{-1}^{1} f'(x)f(x)g(x)dx = -60$$

$$\int_{-1}^{1}(x^4-1)f'(x)dx = -60 = [(x^4-1)f(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}4x^3f(x)dx$$

따라서 $-\int_{-1}^{1}4x^3f(x)dx = -60$

$$\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx = 15$$

18. 정답 : ②

해설 : $(x,y,z) = (6,1,2)$ 일 확률은 빨간공 6번, 파란공1번, 노랑공 2번 나오는 확률이므로

$$\frac{6}{12}\times\frac{5}{11}\times\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{9!}{6!2!} = \frac{9}{220} \quad (가)$$

$(x,y,z) = (6,2,2)$ 일 확률은 빨간공 5번, 파란공2번, 노랑공 2번 나오고 10번째6번째 빨간공이 나오는 확률이므로

$$\frac{6}{12}\times\frac{5}{11}\times\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{9!}{5!2!2!} = \frac{9}{110} \quad (나)$$

(가)+(나) $= \frac{9}{220} + \frac{9}{110} = \frac{27}{220}$

19. 정답 : ①

해설 : 최대가 되는 것은 $\vec{Y}$ 가 최대가 되는 점 (3,2)에서 $-\overrightarrow{OX}$=(0,-1) 일 때 최대가 되므로
$O\vec{P}$가 최대 될 때 $\overrightarrow{OP}$= (3,1)이다. 최댓값 $M=$ 10

최소가 되는 것은 $\overrightarrow{OY}$ 가 최소가 되는 점 (2,1)에서 $\overrightarrow{OX}$ 가 $\overrightarrow{OY}$와 반대방향 일 때 이므로
$|\overrightarrow{OY}| = \sqrt{5} - 1 = m$
따라서 $M^2 + m^2 = 16 - 2\sqrt{5}$

20. 정답 : ④

해설 : 그림에서 H $\cos\theta$. $PH=\sin\theta$ 이므로 $f(\theta)=\frac{1}{2}sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}sin2\theta$

삼각형 PHQ에서

$\overline{HQ}\times\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$\overline{HQ}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\overline{AQ}=\overline{HQ}-(1-\cos\theta)=\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}$

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos^2\theta}\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\lim_{\theta\to0+}\frac{(g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

21. 정답 : ⑤

해설 : $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$를 지나고 $A(-2,0),B(2,0)$을 초점으로 하는 타원 방정식

$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$

$(0,6)$를 지나고 $A(-2,0),B(2,0)$을 초점으로 하는 타원 방정식

$\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$

$\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$에서 그은 접선 방정식은 $y=-x+4$ ---(1)

$(0,6)$을 지나고 (1) 에 수직인 직선은 $y=x+6$ ---(2)

(1) 과 (2)의 교점이 D(-1,5) 이다. $\overline{CD}=\sqrt{2}$

(2) 번 직선과 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$ 의 교점은 E이다. 교점을 구하면 $E\left(-\frac{120}{19},-\frac{6}{19}\right)$

따라서 $CE=\frac{120\sqrt{2}}{19}$

구하는 넓이의 최댓값은 $S=\sqrt{2}\times\frac{120\sqrt{2}}{19}=\frac{240}{19}$

22. 정답 : 32

해설 : 가 이항분포 $B\ n,p)$를 따른다.

$$V(X)=npq=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=6$$

$$\therefore n=32$$

23. 정답 : 4

해설 : $x'=\frac{1}{2}\times 2e^{t-2}-a$

$t=1$을 대입한 결과가 -1 이므로 $a=2$

$y'=be^{t-1}$

$t=1$을 대입한 결과가 2 이므로 $b=2$

$\therefore a+b=4$

24. 정답 : 25

해설 : $\tan 2x=1$에서 $2x=\theta$로 치환을 하면

$$\tan\theta=1\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta=\frac{\pi}{4}\ \text{즉}\ 2x=\frac{\pi}{4}\quad\therefore x=\frac{\pi}{8}$$

$$g'(1)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{8}\right)}\ \text{이므로}$$

$$f'(x)=2\sec^2 2x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\times\sec^2\frac{\pi}{4}=4\text{이다.}$$

$$\therefore 100\times g'(1)=100\times\frac{1}{4}=25$$

25. 정답 : 400

해설 : $p=0.9,\ \hat{q}=0.1$

모비율 p에 대한 95%신뢰구간은

$$0.9-1.96\times\frac{0.9\times0.1}{n}\le p\le 0.9+1.96\times\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}$$ 이고 주어진 조건에서

$$c=0.0294=1.96\times\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}$$ 이므로 계산을 하면

$$n=400$$

26. 정답 : 2

해설 : $(x) = 3\sin kx + 4x$ 이 오직 하나의 변곡점을 가져야 하므로

$f'(x) = 3k\cos kx + 12x^2$

$f''(x) = -3k^2 \sin kx + 24x = 0$인 점이 변곡점이다.

$3k^2 \sin kx = 24x$에서

$g(x) = 3k^2 \sin kx$, $h(x) 24x$의 교점이 1개일 때

$g(x)$의 $x = 0$에서 접선의 기울기는

$g'(x) = 3k^3 \cos kx$

$g'(0) = 3k^3$이므로

$3k^3 \leq 24$ 일 때 교점이 1개이다.

$k^3 \leq 8$

$\therefore k \leq 2$ 최댓값은 2이다.

27. 정답 : 90

해설 : 초점의좌표는 1,0)이다.

$A(x\ ,2\quad x_1)$, $B(x_2, 2\sqrt{x_2})$ 라고 두자.

$x_1 + x_2 + 1 = 18$, $x_1 + x_2 = 17$ 이므로 $x_1 = 8$, $x_2 = 9$

$(1 + x_1)(1 + x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 1 + 17 + 72 = 90$

28. 정답 : 49

해설 : 가)의 조건에서

1) 여학생 연필 1자루씩, 남자 볼펜 1자루씩

=> 남은 연필 4자루를 남학생에게 나누어 주는 경우의 수는 (0,4) (1,3),(2,2),(3,1),(4,0) 5가지

남은 볼펜 2자루를 여학생에게 나누어 주는 경우의수는 (2,0,0),(0,2,0),(0,0,2),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1) 6가지. 따라서 1)의 경우의 수는 총 30가지

2)여학생 연필 2자루씩, 남학생 볼펜 1자루씩

=>남은 연필 1자루를 남학생에게 나누어주는 경우의 수는 (1,0),(0,1) 의 두가지 이고,

남은 볼펜 2자루를 여학생에게 나누어 주는 경우의 수는 1)의 경우와 같이 2가지 따라서 총 경우의 수는 12가지

3)여학생 연필 1자루씩, 남학생 볼펜 2자루씩

=>남은 연필 2자루를 남학생에게 나누어 주는 경우의는 1)과 같이 5가지 (남은 볼펜 0개)

따라서 총 경우의 수는 5가지

4)여학생 볼펜 2자루씩 남학생 볼펜 2자루씩 총 경우의 수는 $2 \times 1 =$

따라서 1),2),3),4)에 의해 30+12+5+2=49

29. 정답 : 86

해설 : 조건 (나)에서

$A \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} - |\overrightarrow{OA}| = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} - 16 = 6$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 22$ ---------- ※

그러므로

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OP}|^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OP}|^2 - 22$ ----------- ※※

이 때 점 P는 평면 $x+y+\ \ 2z=0$위를 움직이므로 $\overrightarrow{OA}$와 평면사이의 각을 구해보면

$(1,1,\sqrt{2}) \cdot (4,0,0) = 2 \times 4 \times \cos(\pi - \alpha) = 4$

즉, 사이각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$ 이고 따라서 $\cos\theta \le \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

여기서 $|\overrightarrow{OP}|^2$의 범위를 구하기위해서 ※식을 이용하자.

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|\cos\theta = 4|\overrightarrow{OP}|\cos\theta = 22$

$|\overrightarrow{OP}|^2 = \left(\frac{11}{2\cos\theta}\right)^2 \ge \left(\frac{11}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{121}{3} = 40.\cdots$

$|\overrightarrow{OP}|$는 9이하의 자연수이므로 위 부등식을 만족하는 값은 7,8,9 뿐이다.

따라서 ※※식의 최댓값 M은 $81-22$, 최솟값 m은 $49-22$이므로

$\therefore M+m = 86$

30. 정답 : 93

해설 : 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 (x)가 모든 실수 x에 대하여

$f'(x\ \ +x+1) = \pi f(1)\sin(\pi x) + f(3)x + 5x^2$ 을 만족시키므로 수치대입법으로

접근한다고 먼저 생각해야 한다.

$x = 0, -1$ 대입하면 $f'(1) = 0,\ f(3) = 5$ 이다.

$f'(x^2+x+1) = \pi f(1)\sin(\pi x) + 5x + 5x^2$ 이다.

여기서 양변에 $2x+1$을 곱해주면

$(2x+1)f'(x^2+x+1) = \pi f(1)(2x+1)\sin(\pi x) + 5(x^2+x)(2x+1)$ 가 된다.

여기서 양변에 부정적분을 하면

$f(x^2+x+1) = \pi f(1)[-\frac{1}{\pi}(2x+1)\cos(\pi x) + \frac{2}{\pi^2}sin(\pi x)] + \frac{5}{2}(x^2+x)^2 +\ \ $ 가 된다

다시 한번 $x=0$ 대입하면 $f(1) = -f(1) + C$ 가되고 따라서 $C = 2f(1)$ 이다.

$x=1$ 을 대입하면 $f(3) = 3f(1) + 10 + C = 5f(1) + 10$ 이다. 여기서 $f(3) = 5$이므로

$5 = 5f(1) + 10$ 따라서 $f(1) = -1$이다.

따라서 $f(1) = -1,\ C = -2$ 이므로

$f(x^2+x+1) = -\pi[-\frac{1}{\pi}(2x+1)\cos(\pi x) + \frac{2}{\pi^2}sin(\pi x)] + \frac{5}{2}(x^2+x)^2 - 2$

따라서 $f(7) = 93$