수학(나형)

1. 정답 : ②
   해설 :
   $2^{-1} \times 2^2 = 2$

2. 정답 : ⑤
   해설 :
   A-B={5,9}
   a=5

3. 정답 : ③
   해설 : 3

4. 정답 : ③
   해설 :
   $$\begin{aligned} \text{준식} &= 1+f(f(2)) \\ &= 1+f(3) \\ &= 1+4=5 \end{aligned}$$

5. 정답 : ①
   해설 :
   4+9d-4-6d=6
   3d=6
   d=2
   $a_4 = 4+3 \cdot 2 = 10$

6. 정답 : ②
   해설 :
   x^4의 계수는 ${}_7C_4 = 35$

7. 정답 : ④
   해설 : 1

8. 정답 : ②
   해설 :
   $$E(X) = \frac{1}{2}n$$
   $$V(X) = \frac{1}{4}n$$
   $$\frac{1}{4}n = E(X^2) - \frac{1}{4}n^2$$
   $$E(X^2) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n$$
   $$\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n = \frac{1}{4}n + 25$$
   $$n^2 = 100$$
   $$n = 10$$

9. 정답 : ⑤
해설 :

$f(x)=x^3-3x+a$

$f'(x)=3x^2-3=0$

$\therefore\ x^2=1$

극대 $f(-1)=-1+3+a=7$

$\therefore\ a=5$

10. 정답 : ④
해설 :

$P(0 \le X \le 2)=\frac{1}{2}\left(2+a-\frac{1}{3}\right)=1$

$\therefore\ a=1$

$P\left(\frac{1}{3} \le X \le a\right)=P\left(\frac{1}{3} \le X \le 1\right)=\left(a-\frac{1}{3}\right)\frac{3}{4}$

$=\frac{1}{2}$

11. 정답 : ③
해설 :

$p; x^2-4x+3>0$

$\sim p; x^2-4x+3 \le 0$

$q; x \le a$

$\sim p \rightarrow q$

$x^2-4x+3 \le 0 \quad \subset \quad x \le a$

$1 \le x \le 3 \quad \subset \quad x \le a$

$\therefore\ a \ge 3$

12. 정답 : ②
해설 :

$\overline{X}-1.96\frac{\delta}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+1.96\frac{\delta}{\sqrt{n}}$

$a \le m \le 7.992$이므로

$2 \cdot 1.96\frac{1.4}{7}=7.992-a$

$\therefore\ a=7.208$

13. 정답 : ①
해설 :

$a_1 = 2$

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2-3a_n}$ (n 은 홀수), $a_{n+1} = 1 + a_n$ (n 은 짝수)

$a_2 = \dfrac{a_1}{2-3a_1} = \dfrac{2}{2-6} = -\dfrac{1}{2}$ $a_3 = 1 + a_2 = \dfrac{1}{2}$

$a_4 = \dfrac{a_3}{2-3a_3} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2-\frac{3}{2}} = 1$ $a_5 = 1 + a_4 = 2$

…

$\sum_{n=1}^{40} a_n = 10\left(2 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + 1\right) = 30$

14. 정답 : ⑤
해설 :

$\int_1^x \left\{\dfrac{d}{dx} f(t)\right\} dt = x^3 + ax^2 - 2$ 이므로
양변 $x = 1$을 대입 하면 $a = 1$ 이고
$f(x) = x^3 + x^2 - 2$가 된다
$f'(x) = 3x^2 + 2x$
$f'(1) = 5$

15. 정답 : ①
해설 :

$n \geq 2$ 이고 $5\log_n 2$의 값이 자연수가 될려면 $n = 2,\ 2^5$이다. 따라서 합은 34이다.

16. 정답 : ④
해설 :

등비급수의 합.
$\overline{OC_1}$을 그으면 $\triangle OA_1C_1$은 정삼각형이다.
1) 부채꼴 OA_1C_1에서 $\triangle OA_1C_1$의 넓이를 빼고 또한 2) $\triangle OB_1C_1$의 넓이에서 부채꼴 OB_2C_1의 넓이를 빼면 첫째항의 넓이가 나온다.

1)의 넓이 $\pi \times 4^2 \times \dfrac{1}{6} - 4\sqrt{3} = \dfrac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}$

2)의 넓이 $\dfrac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} \times \sin 30^\circ - \pi \times 4^2 \times \dfrac{1}{120} = 4\sqrt{3} - \dfrac{4}{3}\pi$

1)의 넓이와 2)의 넓이를 더하면 $a_1 = \dfrac{4}{3}\pi$

공비는 닮음비 이므로 $\triangle OA_1B_1$과 $\triangle OA_2B_2$는 닮음도형이다. $\overline{0B_1} = 4\sqrt{3}$, $\overline{OB_2} = 4$ 이므로

닮음비는 $1 : \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이고 넓이비는 $1 : \dfrac{1}{3}$ 이다.

$$\frac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{3}}=2\pi$$

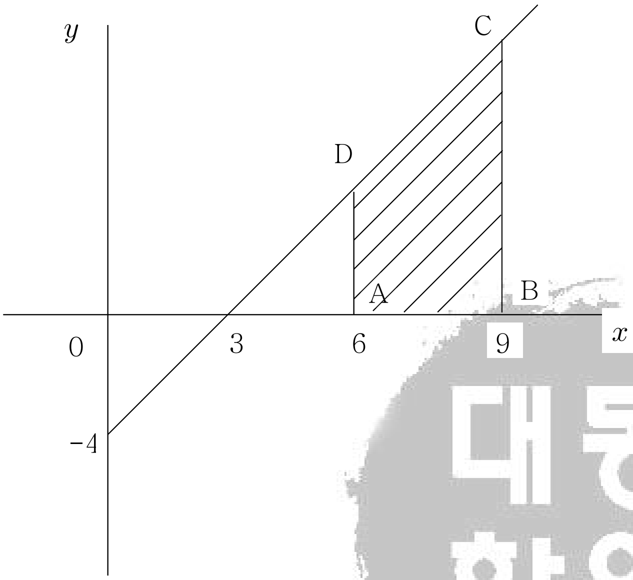
17. 정답 : ④

해설 :

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-3)+4$이다.

(나) $\int_0^6 f(x)dx=0$

(나)의 조건에서 모든 실수에서 증가되는 직선을 생각하면



(가)의 조건에서 양변 $x=3$을 대입 하면 $f(3)=f(0)+4$이고 $f(3)=0$이므로 $f(0)=-4$이어야한다. 따라서 직선의 방정식을 구해보면 $y=\frac{4}{3}x-4$이다. 따라서 구하는 넓이는 사다리꼴 $ABCD$의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\times(4+8)\times3=18$이다.

18. 정답 : ③

해설 :

y좌표가 처음으로 3이 되는 경우는 다음과 같이 3가지이다.

① T T T

$${}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

② HTTT

THTT

TTHT

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

③ HHTTT

TTHHT

HTHTT
THTHT
HTTHT
THHTT

$${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{32}$$

따라서, y좌표가 처음으로 '3'이 되었을 때 점 A의 x좌표가 '1'일 확률은 조건부 확률이다.

$$\frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{6}{32}} = \frac{3}{8}$$

19. 정답 : ①
해설 :
① $n(A)=5$인 X의 부분집합 A를 선택하는 경우의수는 ${}_6C_5$이다.
∴ (가) = ${}_6C_5$ = 6
② $f(k)$를 선택하는 경우의 수는 ${}_5C_1$이다.
∴ (나) = ${}_5C_1$ = 5
③ A에서 A로의 일대일 대응 개수는 5! 이다.
∴ (다) = 5! = 120
④ $p+g+r = 6+5+120 = 131$

20. 정답 : ⑤
해설 :
$y=\dfrac{k}{x-1}+3\,(0<K<3)$의 그래프에서 점 A, B, P, Q의 좌표를 표현하면 다음과 같다.

$A(\dfrac{3-K}{3},0),\ B(0,3-K),\ P(2,3+K),\ Q(2,0)$

(∵ 유리함수 그래프가 대칭의 중심 $(1,3)$을 기준)

ㄱ. $K=1$ 일 때 $P(2,4)$이다. ∴참

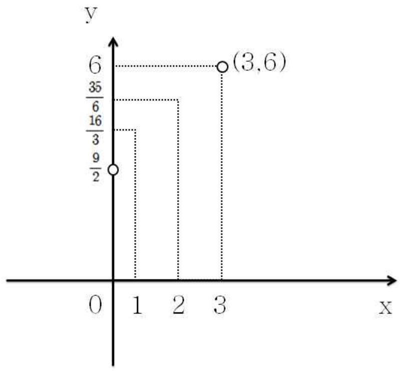
ㄴ. 직선 AB의 기울기 $=\dfrac{-(3-K)}{\frac{3-K}{3}}=-3$

직선 AP의 기울기 $=\dfrac{3+K}{2-\frac{3-K}{3}}=3$

∴ 합은 '0'이다. ∴참

ㄷ. □$PBAQ$의 넓이를 $f(K)$라고 하면

$f(k)=-\dfrac{1}{6}(K-3)^2+6$으로 정리가 된다. $(0<K<3)$



따라서 그래프에서 K가 $0 < K <$ 에서 $f(K)$는 자연수 5가 존재한다.
한편, 직선 BP의 기울기는 K이므로 직선 BP의 기울기는 0과 1사이값이다.
$\therefore$ 참

21. 정답 : ①
해설 :
$f(0)=0$ 이므로 $f(x)=x(x^2+ax+b)$라 둘수 있다.
주어진 조건에 의해 $g(x)=\dfrac{x+3}{x^2+ax+3}$ 임을 알수 있다
분모가 0이되면 안되므로 a의 범위가 $-2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$ 이고 자연수 조건에의해
a는 3이될 때 최소를 가진다. 따라서 $g(x)=\dfrac{x+3}{x^2+3x+3}$ 이다.
g(2)의 최솟값은 $\dfrac{5}{13}$ 이다.

22. 정답 : 15
해설 :
$$6\times5-\frac{6\times5}{2}=15$$

23. 정답 : 20
해설 :
$f'(x)=4x^3-6x \quad f'(2)=20$

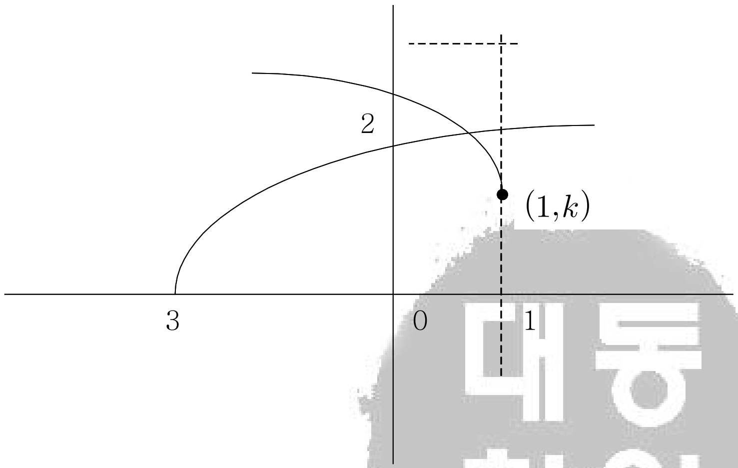
24. 정답 : 63
해설 :
$$\frac{a_9+a_8+a_7+a_6}{a_6+a_5+a_4+a_3}=\frac{a_6(1+r+r^2+r^3)}{a_3(1+r+r^2+r^3)}=r^3=3$$
따라서 $a_7=7\times9=63$

25. 정답 : 10
해설 :

$$\int_1^4 x+|x-3|dx = \int_1^3 3dx + \int_3^4 (2x-3)dx$$
$$[3x]_1^3 + [x^2-3x]_3^4 = 10$$

26. 정답 : 2
해설 :

$y=\sqrt{x+3}$ $y=\sqrt{-x+1+k}$



$k \le 2$ 최대 : 2

27. 정답 : 22
해설 :

위치 $x = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + k$ —①

속도 : $x' = -t^2 + 6t$

가속도 : $x'' = -2t + 6 = 0$

$t = 3$

$t = 3$ ①번식에 대입
$-9 + 27 + k = 40 \quad \therefore k = 22$

28. 정답 : 12
해설 :

흰공 : 1,2,3,4
검은공 : 4,5,6
전체 – 여사건 → (4가 아웃)
$1 - \frac{6!*2}{7!} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$
정답 : 12

29. 정답 : 117

해설 :

자연수 a,b,d,r에 대해 $a_n = a-d(n-1)$, $b_n = b(-r)^{n-1}$라 두자.

(나) 식에서 (가) 식을 빼면

$$\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)-\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n)=40$$

즉, $b(1+r+r^2+r^3+r^4)-b(1-r+r^2-r^3+r^4)=2b(r+r^3)=40$

$br(1+r^2)=2\times2\times5=1\times4\times5=1\times2\times10$ ......

이 때, r이 자연수이므로 $1+r^2=2,5,10,17,26,\cdots$ 이다.

따라서 $r=2$, $b=2$이고 $\displaystyle\sum_{n+1}^{5}b_n=22$ 이다.

(가) 식에서

$$\sum_{n=1}^{5}a_n=5(a-2d)=5,\quad a_3=2-2d=1 \quad ------------(1)$$

(다) 식에서 (나) 식을 빼면

$$\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)-\sum_{n=1}^{5}(a_n-|b_n|)=\sum_{n=1}^{5}(|a_n|-a_n)=14 \quad -------(2)$$

(i) 만약 $a_4\ge0$, $a_5<0$이면 식(2)에서

$-2a_5=14$, $a_5=a-4d=-7$ $-------(3)$

(1), (3)을 연립해서 계산하면 $d=4$, $a=9$이고 이것은 $a_4=-7$이므로 가정에 모순이다.

(ii) 만약 $a_4<0$, $a_5<0$ 이면 식 (2)에서

$-2a_4-2a_5=14$, $\quad a_4+a_5=-7$, $\quad 2a-7d=-7$ $-------(4)$

(1), (4)를 연립하면 $a=7$, $d=3$이다.

그러므로 $a_7=-11$, $b_7=128$,

$\therefore a_7+b_7=117$

30. 정답 : 5

해설 :

먼저, (가) 조건은

$f(x)=x^2(x-a)$, $g(x)=-(x-2)^2$ 로 세울수 있음을 말해주고 있다.

(나) 조건을 이용해서

$f(x)$의 접선 중 $(2,0)$을 지나는 서로다른 접점이 2개가 있음을 말하는데

$f(x)$의 접점을 $(t,f(t))$ 둬서 접선의 방정식을 구해보면

$y=(3t^2-2at)(x-t)+t^3-at^2$ 이 되고 여기서 $x=2, y=0$을 대입하여 정리하면

$-t[2t^2-(a+6)t+4a]=0$ 방정식의 서로다른 해인 t가 2개 있어야 한다.

따라서, t=0이 중근이거나 $2t^2-(a+6)t+4a=0$ 이 중근을 가져야다.

이때의 a값을 다 구해보면 $a=0$ or $a=2$ or $a=18$ 인데 이때 (다) 조건을 만족시키는 a=0 뿐이다.

따라서, $f(x)=x^3$, $g(x)=-(x-2)^2$ 이 된다.

구하고자 하는 값은 x>0 에 대해서 $g(x)\le kx-2\le f(x)$ 성립하는 K의 범위인데

$h(x)=kx-2$ 라 두면 (0,-2)를 지나는 직선이 되고 이때 k값은 직선의 기울기가 된다.

$\beta\le k\le\alpha$ 라 두면 α는 $f(x), h(x)$가 접할 때의 k값이 되고, β는 $g(x), h(x)$가 접할 때의 k값이 된다.

따라서, $\therefore\ \alpha = 3$

$\beta = 4 - 2\sqrt{2}$

$\therefore \alpha - \beta = 3 - (4 - 2\sqrt{2}) = -1 + 2\sqrt{2}$

$\therefore a = -1, b = 2, \therefore a^2 + b^2 = 5$