Theoretische Physik 1b: Mechanik
Übungsblatt 6

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Dr. Michael Marthaler
Andrii Sokolov, M.Sc.

SS 2018 **Abgabe 18.05.2018**

***Info**: Bitte schreiben Sie Name und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt und tackern Sie dieses. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.*

Aufgabe 1: Ein frei schwingendes Pendel (*10 Punkte*)

Ein Pendel bewege sich im festen Abstand l, wie in der Abb. 1 dargestellt.

(a) Formulieren Sie die Zwangsbedingungen und wählen Sie generalisierte Koordinaten. (*3 Punkte*)

(b) Bestimmen Sie die Lagrangegleichung. (*2 Punkte*)

(c) Berechnen Sie die Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen. (*2 Punkte*)

(d) Benutzen Sie die Drehimpulserhaltung und stellen Sie eine Bewegungsgleichung für den Winkel ϑ (siehe Abb. 1) auf. Inwiefern unterscheidet sich diese Gleichung für kleine Winkel ϑ, von der Gleichung die man für ein Pendel in einer Dimension bekommen hätte? (*3 Punkte*)

Aufgabe 2: Coulomb Potential und Noethertheorem (*8 Punkte*)

Betrachten Sie ein Teilchen im Potential

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{\mathbf{r}^2}.$$

(a) Zeigen Sie ausführlich, dass die Wirkung invariant unter der simultanen Transformation $\mathbf{r} \to \lambda \mathbf{r}$ und $t \to \lambda^2 t$ ist. (*3 Punkte*)

(b) Konstruieren Sie mithilfe des Noethertheorems die mit dieser Transformation verbundenen Erhaltungsgrößen. (*5 Punkte*)

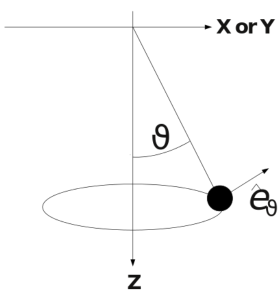

Abbildung 1: Anordnungen von Aufgabe 1.

Aufgabe 3: Freier Fall im homogenen Schwerefeld (*10 Punkte*)

Ein Teilchen der Masse m und den Anfangsgeschwindigkeiten $v_x, v_y \neq 0$, $v_z = 0$ fällt frei im homogenen Schwerefeld.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in kartesischen Koordinaten auf und bestimmen Sie die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen. (*3 Punkte*)

(b) Finden Sie drei kontinuierliche Symmetrien des Systems und zeigen Sie explizit, dass die Lagrange-Funktion unter den zugehörigen einparametrigen Familien von kontinuierlichen Transformationen invariant bleibt. (*4 Punkte*)

(c) Benutzen Sie den Satz von Noether, um aus den Symmetrien drei Erhaltungsgrößen des Systems herzuleiten. (*3 Punkte*)

Aufgabe 4: Die Gallileische Gruppe (*12 Punkte*)

In dieser Aufgabe werden wir beweisen, dass die Galileitransformationen Gruppeneigenschaften aufweisen. Betrachten Sie die allgemeine Galileitransformation, die auf den Koordinatenvektor $(\mathbf{r}, t)$ wie folgt wirkt:

$$G(\hat{R}, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v})(\mathbf{r}, t) = (\hat{R}\mathbf{r} + \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t, t + t_0). \tag{1}$$

$\hat{R}$ ist eine orthogonale 3×3 Matrix, die die Koordinatenrotation beschreibt. $\mathbf{r}_0$ und t_0 sind Koordinaten- und Zeittranslationen und $\mathbf{v}$ ist die Geschwindigkeit des galiläischen Boost.

(a) Die Verkettung zweier solcher Transformationen berechnet sich zu $G_2 \circ G_1(\mathbf{r}, t) = G_2\left(G_1(\mathbf{r}, t)\right)$. Beweisen Sie, dass

$$G_2(\hat{R}_2, \mathbf{r}_2, t_2, \mathbf{v}_2) \circ G_1(\hat{R}_1, \mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{v}_1)(\mathbf{r}, t) = G_3(\hat{R}_3, \mathbf{r}_3, t_3, \mathbf{v}_3)(\mathbf{r}, t), \tag{2}$$

wobei

$$\begin{aligned} \hat{R}_3 &= \hat{R}_2 \hat{R}_1 \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_2 + \hat{R}_2 \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_2 t_1 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_2 + \hat{R}_2 \mathbf{v}_1 \\ t_3 &= t_2 + t_1. \end{aligned}$$

Damit wird gezeigt, dass die Verkettung zweier Galileitransformationen ebenfalls eine Galileitransformation darstellt. (*3 Punkte*)

Hinweis: Sie dürfen Eigenschaften orthogonaler Matrizen ohne weiteren Beweis verwenden.

(b) Definieren Sie die identische Galileitransformation, die den Koordinatenvektor unverändert lässt. Ist diese Transformation eindeutig? (*1 Punkt*)

(c) Beweisen Sie, dass Galileitransformationen assoziativ sind, also dass $G_1 \circ (G_2 \circ G_3)(\mathbf{r}, t) = (G_1 \circ G_2) \circ G_3(\mathbf{r}, t)$. (*3 Punkte*)

(d) Zeigen Sie dass für jede Galileitransformation G_1 ein Inverses G_1^{-1} existiert, sodass $G_1 \circ G_1^{-1}(\mathbf{r}, t) = G_1^{-1} \circ G_1(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{r}, t)$. (*2 Punkte*)

(e) Sie haben nun gezeigt, dass Galileitransformationen eine Gruppe bilden. Handelt es sich um eine abelsche (kommutative) Gruppe? Dies ist der Fall, falls die Beziehung $G_1 \circ G_2(\mathbf{r}, t) = G_2 \circ G_1(\mathbf{r}, t)$ für Galileitransformationen gilt. (*3 Punkte*)