

# Theoretische Physik 1b: Mechanik

## Übungsblatt 11

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch

Dr. Michael Marthaler

Andrii Sokolov, M.Sc.

SS 2018

Abgabe 25.06.2018

*Info:* Bitte schreiben Sie Name und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt und tackern Sie dieses. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.

### Aufgabe 1: Symmetrischer Kreisel (10 Punkte)

Auf einen symmetrischen Kreisel wirkt das Drehmoment  $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$ . Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen  $\omega(0) = 0$  und  $\vec{e}_3(0) = \vec{e}_z$ . Geben Sie die Zeitabhängigkeit der Eulerwinkel an. (10 Punkte)

### Aufgabe 2: Schaukelbewegung einer Halbkugel (18 Punkte)

Eine starre Halbkugel mit Radius  $R$  und konstanter Massendichte  $\rho_0$  führt im Schwerfeld eine Schaukelbewegung auf einer horizontalen Ebene aus; die Kugel rollt dabei auf der Ebene ab. Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Halbkugel bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt, die senkrecht zur Symmetrieachse steht. Geben Sie die Lage des Schwerpunktes  $S$  in Abhängigkeit vom Winkel  $\Phi$  an. Stellen Sie die Lagrangefunktion für kleine Auslenkungen der Gleichgewichtslage an. Geben Sie die allgemeine Lösung dazu an.

- Berechnen Sie zunächst die Koordinate  $z_S$  (in Kugelkoordinaten), für die Halbkugel in Ruhelage. Hierbei ist  $z_S$  die  $z$ -Koordinate des Schwerpunktes. Aus Symmetriegründen gilt für die anderen Komponenten der Schwerpunktskoordinate  $x_S = y_S = 0$ . (4 Punkte)
- Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Halbkugel bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt, die senkrecht zur Symmetrieachse steht. (5 Punkte)
- Berechnen Sie die kinetische Energie des Schwerpunkts, die Rotationsenergie und die potenzielle Energie. (5 Punkte)
- Finden sie die Lösung der Bewegungsgleichungen im Fall kleiner Auslenkungen aus der Ruhelage. (4 Punkte)

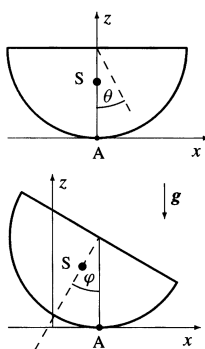


Abbildung 1: Hilfsskizzen zu Aufgabe 2

### Aufgabe 3: Abplattung der Erde

(12 Punkte)

Die Erde ist in guter Näherung ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit den Halbachsen  $a = b > c$ . Die Gravitationsenergie  $W_{grav}$  und die Masse  $M$  eines Rotationsellipsoid mit homogener Massendichte  $\rho_0$  sind

$$W_{grav} = -\frac{3GM^2}{5a} \frac{\arcsin \epsilon}{\epsilon}$$
$$M = \frac{4\pi}{3} \rho_0 a^2 c = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R^3$$

Dabei wurden die Exzentrizität  $\epsilon = (1 - c^2/a^2)^{1/2}$  und der mittlere Radius  $R = (a^2 c)^{1/3}$  verwendet. Das Rotationsellipsoid rotiert im körperfesten System mit dem Drehimpuls  $L_3 = \Theta_3 \omega_3$  um die Figurenachse. Dann ist seine Gesamtenergie

$$W_{total}(\epsilon) = T_{rot} + W_{grav} = \frac{L_3^2}{2\Theta_3(\epsilon)} + W_{grav}(\epsilon) \quad (1)$$

Die deformierbare Erde stellt sich nun so ein, dass  $W_{total}$  als Funktion der Exzentrizität  $\epsilon$  minimal wird; dabei sind der Drehimpuls  $L_3$  und die Masse  $M$  fest vorgegeben.

- (a) Entwickeln Sie  $W_{grav}$  und das Trägheitsmoment  $\Theta_3$  bis zur ersten nichtverschwindenden Ordnung in  $\epsilon$ . (6 Punkte)
- (b) Berechnen Sie hieraus die Erdabplattung  $(a - c)/a$  (6 Punkte)

*Hinweis:* Tatsächlich ist die Dichte der Erde inhomogen und nimmt zum Erdmittelpunkt hin zu (Eisenkern). Ein Modell aus konzentrischen Ellipsoidenschalen unterschiedlicher Dichte liefert daher bessere Ergebnisse

Das der Erde am besten angepasste Rotationsellipsoid heißt Referenzellipsoid. Es hat die Halbachse  $a = 6378.137\text{km}$ ,  $c = 6356.753\text{km}$  und die Abplattung  $(a - c)/a = 1/298.26$ . Die reale Gestalt der Erde, die durch die Oberfläche der Ozeane (im hypothetischen statischen Gleichgewicht) gegeben ist, wird Geoid genannt. Dabei denkt man sich die Ozeane unter den Kontinenten fortgesetzt.

Die Abweichung des Geoids vom Referenzellipsoid werden in der Geodätik vermessen und betragen etwa bis zu 100 Meter. Die Abweichungen rühren daher, dass das Geoid zu einer niedrigeren Energie  $T_{rot} + T_{grad}$  führt als ein Rotationsellipsoid. Zusätzlich spielen auch lokale Inhomogenitäten eine Rolle, die im Geoid berücksichtigt werden müssen.