ακολουθούν
οι λύσεις
των θεμάτων
1–10

Λύσεις των Θεμάτων

Θέμα 1ο

A) Είναι $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$, $x>0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=x\cdot\ln x$, με

$$f'(x) = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)' = x^x(\ln x+1),\ x>0$$

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0$ (διότι $x^x>0$) $\Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow$

$x=1/e$

	0	$1/e$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0 $+$
f		$\searrow$	$\nearrow$

πίνακας μεταβολών

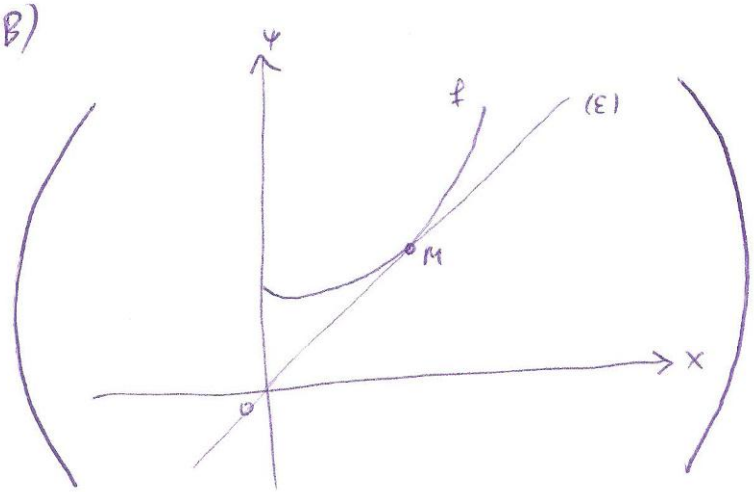
$f \searrow$ στο $(0, 1/e]$ και $\nearrow$ στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

Επίσης, η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με

$$f''(x) = \left(x^x(\ln x+1)\right)' = (x^x)'\cdot(\ln x+1) + x^x\cdot(\ln x+1)' =$$

$$= x^x(\ln x+1)^2 + \frac{x^x}{x} > 0 \text{ στο } (0,+\infty),$$ ως άθροισμα θετικών. Άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

B)



Έστω $M(a, a^a)$, $a>0$ το σημείο επαφής.

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$\varepsilon:\ \psi - a^a = a^a(\ln a+1)\cdot(x-a).$$

Το σημείο $O(0,0)$ ανήκει στην (ε), άρα θα ισχύει

$$-a^a = -a\cdot a^a(\ln a+1)$$

(αφού οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ θα επαληθεύουν την εξίσωση της (ε))

δηλαδή $a(\ln a+1)=1$ ή $a\ln a+a-1=0$.

<u>Ισχυρισμός</u> Η εξίσωση $x\ln x+x-1=0$ έχει μοναδική λύση την $x=1$ στο $(0,+\infty)$.

[Πράγματι, το $x=1$ είναι προφανής ρίζα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με

$$\varphi(x)=x\ln x+x-1.$$

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με $\varphi'(x)=\ln x+2$.

Οπότε, $\varphi'(x)>0 \iff \ln x+2>0 \iff \ln x>-2 \iff x>1/e^2$

	0		$1/e^2$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$		$\nearrow$	

Είναι $\varphi\left(\left(0,1/e^2\right]\right) \underset{\searrow}{\overset{\varphi \text{ συνεχής}}{=}} \left(\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x),\ \varphi\left(1/e^2\right)\right] = \left(-1,\ -\dfrac{e^2+1}{e^2}\right]$

Το $0\notin\varphi\left(\left(0,1/e^2\right]\right)$, άρα η εξίσωση $\varphi(x)=0$ είναι αδύνατη στο $\left(0,1/e^2\right]$

(χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1/x}{-1/x^2}=-\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$)

Επίσης, $\varphi\left(\left(\dfrac{1}{e^2},+\infty\right)\right) \underset{\nearrow}{\overset{\varphi \text{ συνεχής}}{=}} \left(\lim\limits_{x\to 1/e^2}\varphi(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)=\left(\varphi\left(\dfrac{1}{e^2}\right),+\infty\right)=$

$=\left(-\dfrac{e^2+1}{e^2},+\infty\right)$ και $0\in\varphi\left(-\dfrac{e^2+1}{e^2},+\infty\right)$, άρα η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει μοναδική λύση (λόγω μονοτονίας) στο $\left(\dfrac{1}{e^2},+\infty\right)$

Συμπέρασμα: $\varphi(x)=0 \iff x=1$]

Οπότε, λόγω του ισχυρισμού, προκύπτει ότι $a=1$.

Άρα το σημείο επαφής είναι το $M(1,1)$ και η ζητούμενη

εφαπτομένη η $\varepsilon: \psi = x$

Γ. $x\cdot(x^{x-1}-1)\geq 0 \iff x^x - x \geq 0 \iff x^x \geq x$

Το τελευταίο ισχύει, διότι η f είναι κυρτή, άρα η C_f βρίσκεται "πάνω" από την εφαπτομένη (ε), άρα $f(x)\geq x$, για κάθε $x>0$ δηλ. $x^x \geq x$, για κάθε $x>0$.
(η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$)

Δ. Καταρχήν, $a>0$, $b>0$, διότι τα A, B βρίσκονται στην C_f.

Είναι $\vec{OA} = (a, f(a))$, $\vec{OB} = (b, f(b))$ και επειδή

$\vec{OA} \parallel \vec{OB} \Rightarrow \dfrac{f(a)}{a} = \dfrac{f(b)}{b}$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $m: [a,b]\to\mathbb{R}$, με $m(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

Η m είναι συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b)

με $m'(x) = \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2} =$

$= \dfrac{x\cdot x^x(\ln x+1) - x^x}{x^2} = \dfrac{x^x}{x^2}(x\ln x + x - 1)$, $x>0$.

Επίσης, $m(a) = m(b)$, λόγω της σχέσης (1).

Άρα από το Θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi\in(a,b)$: $m'(\xi)=0$

δηλ. $\dfrac{\xi^\xi}{\xi^2}(\xi\ln\xi + \xi - 1) = 0$, δηλ. $\xi\ln\xi + \xi - 1 = 0$

δηλ. $\xi\ln\xi = 1-\xi$ δηλ. $\ln\xi = \dfrac{1}{\xi} - 1$

(προφανώς $\xi>0$, αφού $0<a<\xi<b$)

Ε. i) Η ανισότητα σχέσης γράφεται ισοδύναμα:

$$V < e^{\ln x_1^{x_1}} + e^{\ln x_2^{x_2}} + \dots + e^{\ln x_v^{x_v}} < 4V \iff$$

$$V < x_1^{x_1} + x_2^{x_2} + \dots + x_v^{x_v} < 4V \iff$$

$$\Leftrightarrow \quad \nu < f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_\nu) < 4\nu \quad \Leftrightarrow$$

$$1 < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_\nu)}{\nu} < 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$f(1) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_\nu)}{\nu} < f(2).$$

Η f είναι $\uparrow$ στο $[1,2]$, αφού $1 > 1/e$

Άρα
$$\left.\begin{cases} 1 < x_1 < 2 \xRightarrow{f\uparrow} f(1) < f(x_1) < f(2) \\ 1 < x_2 < 2 \xRightarrow{f\uparrow} f(1) < f(x_2) < f(2) \\ \dots\dots\dots\dots \\ 1 < x_\nu < 2 \xRightarrow{f\uparrow} f(1) < f(x_\nu) < f(2) \end{cases}\right\} \xRightarrow{(+)}$$

$$\nu \cdot f(1) < f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_\nu) < \nu \cdot f(2) \quad \Rightarrow$$

$$f(1) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_\nu)}{\nu} < f(2)$$ που είναι η

ζητούμενη σχέση.

ii) Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$, $f(1) \neq f(2)$ (διότι $1 < 2$ και $f\uparrow$) και ο αριθμός $\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_\nu)}{\nu}$

είναι ενταξύ των αριθμών $f(1)$, $f(2)$.

Άρα από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $x_0 \in (1,2)$:

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_\nu)}{\nu}, \quad \text{δηλ.}$$

$$\nu \cdot x_0^{x_0} = x_1^{x_1} + x_2^{x_2} + \dots + x_\nu^{\nu}.$$

Το x_0 αυτό είναι μοναδικό, διότι η f είναι γνησίως μονότονη στο $[1,2]$, άρα 1-1.

Θέμα 2ο

A) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[-1,0]\to\mathbb{R}$, με

$$f(x)=e^{2x}+x.$$

Η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης, $f(-1)=e^{-2}-1=\frac{1}{e^2}-1=\frac{1-e^2}{e^2}<0$ και $f(0)=1>0$.

Άρα, από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in(-1,0)$: $f(x_0)=0$

δηλ. $e^{2x_0}+x_0=0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$, με $f'(x)=2e^{2x}+1>0$

$\xrightarrow[\text{στο } [-1,0]]{f \text{ συνεχής}}$ $f\uparrow$ στο $[-1,0]$, άρα 1-1. Οπότε το x_0 που βρήκαμε παραπάνω είναι μοναδικό.

B) Είναι $Re(z)=e^{x}$ και $Im(z)=x$. $(x<0)$.

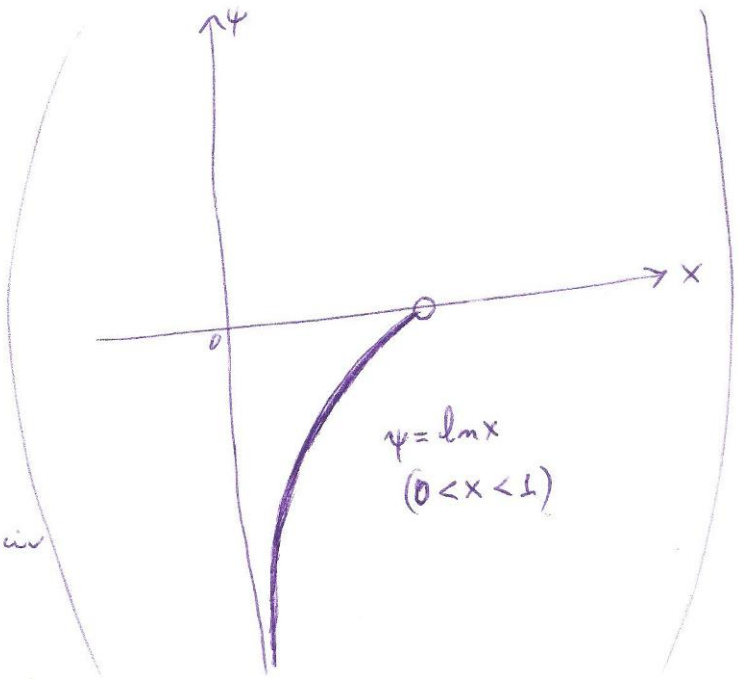
Άρα, $Re(z)=e^{Im(z)}\Rightarrow Im(z)=\ln(Re(z))$, $Im(z)<0$.

<u>Αντίγραφα</u>: Έστω ένα σημείο $M(\alpha,\ln a)$, $0<a<1$ της $\psi=\ln x$, με $\psi<0$

Τότε ο μιγαδικός που αντιστοιχεί στο σημείο M είναι ο $z=a+\ln a\, i$

$=e^{\ln a}+\ln a\, i=$

$=e^{k}+ki$, με $k=\ln a<0$



<u>Συμπέρασμα</u>: Οι εικόνες των μιγαδικών z κινούνται στην καμπύλη $\psi=\ln x$ του 4ου τεταρτημορίου.

Γ. Η απόσταση των εικονιών z από την αρχή των αξόνων είναι $|z| = \sqrt{(e^x)^2 + x^2} = \sqrt{e^{2x} + x^2}$, $x<0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $d : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, με τύπο $d(x) = \sqrt{e^{2x} + x^2}$.

Η **d** είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$d'(x) = \frac{(e^{2x}+x^2)'}{2\sqrt{e^{2x}+x^2}} = \frac{2e^{2x}+2x}{2\sqrt{e^{2x}+x^2}} = \frac{e^{2x}+x}{\sqrt{e^{2x}+x^2}}, \quad x<0$$

$$= \frac{f(x)}{\sqrt{e^{2x}+x^2}}, \quad x<0$$

Όπως, $d'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \overset{A)}{\Longleftrightarrow} x = x_0$

και $d'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \underset{\text{στο } \mathbb{R}}{\overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow}} x > x_0$

	$-\infty$	x_0	0
$d'(x)$	$-$	$+$	
d	$\searrow$	$\nearrow$	
		min	

Άρα η συνάρτηση της απόστασης **d** ελαχιστοποιείται στο $x_0 \in (-1, 0)$. Ο φανταστικός με τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι ο $z = e^{x_0} + x_0 i$

Θέμα 3ο

A) Θεωρούμε τη συνάρτηση $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, με

$$F(x)=\int_a^x (f(t)-g(t))\,dt$$

⊙ Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, ως παραγωγίσιμη, άρα η F είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) – και συνεχής στο $[a,b]$.

Άρα, από το Θ.Μ.Τ. για την F στο $[a,b]$, προκύπτει η ύπαρξη ενός $x_0\in(a,b)$: $F'(x_0)=\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$, δηλ.

$$f(x_0)-g(x_0)=\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b (f(t)-g(t))\,dt-0\right)\Rightarrow$$

$$f(x_0)-g(x_0)=\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(t)\,dt-\int_a^b g(t)\,dt\right)\Rightarrow$$

$$f(x_0)-g(x_0)=\frac{1}{b-a}\cdot 0\Rightarrow$$

$$f(x_0)-g(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)=g(x_0).$$

B) Είναι: $\ln\left(\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right)=g'(x)-f'(x)\Leftrightarrow$

$$\ln f'(x)-\ln g'(x)=g'(x)-f'(x)\Leftrightarrow$$

$$\ln f'(x)+f'(x)=\ln g'(x)+g'(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}\quad(1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $m:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $m(x)=\ln x+x$.

Η m είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με $m'(x)=\frac{1}{x}+1>0$, για κάθε $x>0$.

Άρα η m είναι $\uparrow$ στο $(0,+\infty)$, άρα και 1-1.

Από τη σχέση (1) προκύπτει τώρα ότι

$$m(f'(x))=m(g'(x))\xrightarrow[1-1]{m} f'(x)=g'(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

Άρα υπάρχει $C\in\mathbb{R}$: $f(x)=g(x)+C$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=x_0\Rightarrow f(x_0)=g(x_0)+C\xrightarrow{f(x_0)=g(x_0)} C=0.$

Άρα $f(x)=g(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δηλαδή οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες στο $\mathbb{R}$.

Γ. i) Έχουμε: $\int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^{x+1} f(t)\,dt = f(x+1) - f(x) + 2x - e - 1$

$$\Rightarrow \int_0^{x+1} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt = f(x+1) - f(x) + 2x - e - 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

f συνεχής $\Rightarrow f(x+1), \int_0^{x+1} f, \int_0^x f$ παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2) παίρνουμε:

$$f(x+1) - f(x) = \left(f(x+1) - f(x)\right)' + 2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Ας ονομάσουμε $g(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Τότε $g(x) = g'(x) + 2$, δηλ. $g'(x) - g(x) = -2$

και πολλαπλασιάζοντας με e^{-x} παίρνουμε:

$$e^{-x} \cdot g'(x) - e^{-x} \cdot g(x) = -2e^{-x}$$

$$\left(e^{-x} \cdot g(x)\right)' = \left(2e^{-x}\right)', \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$: $e^{-x} \cdot g(x) = 2e^{-x} + c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για $x = 0 \Rightarrow g(0) = 2 + c$, δηλ. $f(1) - f(0) = 2 + c$, άρα $c = f(1) - f(0) - 2$.

Οπότε $e^{-x} \cdot g(x) = 2e^{-x} + f(1) - f(0) - 2 \Rightarrow$

$$g(x) = 2 + \left(f(1) - f(0) - 2\right) \cdot e^{x}$$

$$f(x+1) - f(x) = 2 + \left(f(1) - f(0) - 2\right) \cdot e^{x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άρα $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x+1) - f(x)\right) = 2 + \left(f(1) - f(0) - 2\right) \cdot 0 = 2$

ii) Από το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x, x+1]$ $(x < 0)$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi_x \in (x, x+1)$: $f'(\xi_x) = f(x+1) - f(x)$.

Άρα, $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(\xi_x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x+1) - f(x)\right) \overset{\Gamma.\,i)}{=} 2$

Για το $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(\xi_x)$ θέτουμε $w = \xi_x$.

Τότε, από την σχέση $x < \xi_x < x+1$ και το κριτήριο παρεμβολής, προκύπτει ότι $\omega \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$.

Άρα $2 = \lim\limits_{x \to -\infty} f'(\xi_x) = \lim\limits_{\omega \to -\infty} f'(\omega)$.

Δηλαδή $\lim\limits_{\omega \to -\infty} f'(\omega) = 2$.

iii) Από την σχέση (*) βρίσκουμε

$$f(x+1) - f(x) = f'(x+1) - f'(x) + 2 \Rightarrow$$

$$f'(x+1) = (f(x+1) - f(x)) + f'(x) - 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x+1) = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x+1) - f(x)) + \lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) - 2 =$

$= 2 + 2 - 2 = 2$

<u>β' τρόπος</u> Για το $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x+1)$ θέτουμε $u = x+1$.

Τότε $u \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$.

Άρα, $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x+1) = \lim\limits_{u \to -\infty} f'(u) \overset{\Gamma.\ ii)}{=} 2$.

Θέμα 4ο | Α) Η σχέση της υπόθεσης γράφεται:

$$(x+1)\cdot\int_0^x g(t)\,dt - \int_0^x\left(\int_0^t g(u)\,du\right)dt = \int_1^{x+1}(te^t + t\ln t - \alpha t)\,dt \quad (1)$$

Η g είναι συνεχής $\Rightarrow$ η $\int_0^t g(u)\,du$ είναι παραγωγίσιμη $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ η $\int_0^t g(u)\,du$ είναι συνεχής $\Rightarrow$ η $\int_0^x\left(\int_0^t g(u)\,du\right)dt$

είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$.

Επίσης, η συνάρτηση $t \longmapsto te^t + t\ln t - \alpha t$ είναι συνεχής, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, άρα το 2ο μέλος της σχέσης (1) είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(-1,+\infty)$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$(x+1)'\cdot\cancel{\int_0^x g(t)\,dt} + (x+1)\cdot g(x) - \cancel{\int_0^x g(u)\,du} = (x+1)e^{x+1} + (x+1)\cdot\ln(x+1) - \alpha(x+1)$$

$$\xrightarrow{x+1>0} g(x) = e^{x+1} + \ln(x+1) - \alpha, \quad x>-1.$$

Β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, με

$$h(x) = \int_0^x g(t)\,dt.$$

Τότε, από τα δεδομένα προκύπτει ότι $h(x) \geq 0 = h(0)$, για κάθε $x>-1$. Άρα η h παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο μηδέν, το μηδέν είναι εσωτερικό σημείο του $(-1,+\infty)$ και η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ (άρα και στο μηδέν). Άρα από το Θεώρημα Fermat, $h'(0)=0$.

Όμως, $h'(x) = g(x)$. Άρα θα πρέπει $g(0)=0$, δηλ.

$e + \ln 1 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = e$.

Γ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ (αφού οι συναρτήσεις e^{x+1}, $\ln(x+1)$ είναι παραγωγίσιμες, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων), με $g'(x) = e^{x+1}\cdot(x+1) + \frac{(x+1)'}{x+1} = e^{x+1} + \frac{1}{x+1} > 0$, για κάθε $x>-1$. Άρα η g είναι $\uparrow$ στο $(-1,+\infty)$.

Επίσης, έχουμε ότι $g(0)=0$.

Άρα, για $x>0 \xrightarrow{g\uparrow} g(x)>g(0)=0$ και για $-1<x<0 \xrightarrow{g\uparrow} g(x)<g(0)=0$.

Πρόσημο της g

	-1		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$, με $\varphi(x)=f(x)+g(x)$.

Η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων f, g.

Επίσης, $\varphi(1)=f(1)+g(1)=0+g(1)=g(1)=e^2+\ln 2-e=$

$=\underbrace{e(e-1)}_{(+)}+\underbrace{\ln 2}_{(+)}>0$ και $\varphi(0)=f(0)+g(0)=$

$=f(0)=\int_1^0 g(t)\,dt=-\int_0^1 g(t)\,dt<0$

[διότι $g(t)\geq 0$ στο $[0,1]$ και η g δεν είναι παντού μηδέν στο $[0,1]$, άρα $\int_0^1 g(t)\,dt>0 \Rightarrow$ $-\int_0^1 g(t)\,dt<0$].

Άρα, από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi\in(0,1)$: $\varphi(\xi)=0$, δηλ. $f(\xi)+g(\xi)=0$

Θα αποδείξουμε ότι το ξ είναι μοναδικό.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, με $\varphi'(x)=f'(x)+g'(x)=$

$=\left(\int_1^x g(t)\,dt\right)'+g'(x)=g(x)+g'(x)>0$, για κάθε $x\in(0,1)$

[διότι $g(x)>0$ για $x\in(0,1)$ και $g'(x)>0$, για κάθε $x>-1$]

Άρα $\varphi'(x)>0$, για κάθε $x\in(0,1)$ και φ συνεχής στο $[0,1] \Rightarrow$

$\varphi\uparrow$ στο $[0,1] \Rightarrow \varphi$ 1-1 στο $[0,1] \Rightarrow$ το ξ είναι μοναδικό.

Ε) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την συνάρτηση f στο διάστημα $[x, x+1]$ $(x>0)$.

Προκύπτει η ύπαρξη κάποιου $\xi_x \in (x, x+1)$:

$$f'(\xi_x) = \frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = f(x+1)-f(x) \Rightarrow g(\xi_x) = f(x+1)-f(x)$$

Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(\xi_x)$

Για το τελευταίο όριο, θέτουμε $\omega = \xi_x$.

Τότε, από τη σχέση $x < \xi_x < x+1$ και το κριτήριο παρεμβολής, προκύπτει ότι

$$\omega \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} g(\xi_x) = \lim\limits_{\omega\to+\infty} g(\omega) = \lim\limits_{\omega\to+\infty}\left(e^{\omega+1} + \ln(\omega+1) - e\right) =$

$= +\infty + (+\infty) - e = +\infty.$

Τελικά, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right) = +\infty.$

<u>β' τρόπος</u> Είναι $f(x+1)-f(x) = \int_0^{x+1} g(t)\,dt - \int_0^x g(t)\,dt =$

$= \int_0^{x+1} g(t)\,dt + \int_x^0 g(t)\,dt = \int_x^{x+1} g(t)\,dt.$

Είναι $0 < x \le t \le x+1 \xrightarrow{g\uparrow} g(x) \le g(t) \le g(x+1) \Rightarrow$

$\int_x^{x+1} g(x)\,dt \le \int_x^{x+1} g(t)\,dt \le \int_x^{x+1} g(x+1)\,dt \Rightarrow$

$(x+1-x)\cdot g(x) \le \int_x^{x+1} g(t)\,dt \le (x+1-x)\cdot g(x+1) \Rightarrow$

$g(x) \le \int_x^{x+1} g(t)\,dt \le g(x+1)$, για κάθε $x>0$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x+1) = +\infty \xrightarrow[\text{παρεμβολής}]{\text{Κριτήρ.}} \lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} g(t)\,dt = +\infty$

Θέμα 5ο A) f παραγωγίσιμη $\Rightarrow e^{f^2}$ παραγωγίσιμη, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Παραγωγίζοντας τη σχέση $(f(x)+1)e^{f^2(x)} = 2e$ έχουμε:

$$(f(x)+1)' \cdot e^{f^2(x)} + (f(x)+1)\cdot(e^{f^2(x)})' = 0 \Rightarrow$$

$$f'(x)\, e^{f^2(x)} + (f(x)+1)\cdot e^{f^2(x)} \cdot 2f(x)\cdot f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$f'(x)\cdot e^{f^2(x)} \cdot [1 + 2(f(x)+1)\cdot f(x)] = 0 \Rightarrow$$

$$f'(x)\cdot e^{f^2(x)} (2f^2(x) + 2f(x) + 1) = 0, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Όμως, $e^{f^2(x)} > 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $2f^2(x)+2f(x)+1 > 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (διότι το τριώνυμο $2t^2+2t+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -4<0$, άρα $2t^2+2t+1>0$, για κάθε $t\in\mathbb{R}$).

Άρα η σχέση (1) δίνει $f'(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε υπάρχει σταθερά $\gamma\in\mathbb{R}$: $f(x)=\gamma$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε, η αρχική σχέση της υπόθεσης δίνει:

$$(\gamma+1)\cdot e^{\gamma^2} = 2e.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $\varphi(x) = (x+1)e^{x^2} - 2e$, έχουμε ότι $\varphi(1)=0$ και $\varphi'(x) = e^{x^2} + (x+1)\cdot e^{x^2}\cdot 2x =$

$$= e^{x^2}(1 + 2x(x+1)) = \underbrace{e^{x^2}}_{\text{θετικό στο } \mathbb{R}} \cdot \underbrace{(2x^2+2x+1)}_{\text{θετικό στο } \mathbb{R}} > 0, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Άρα $\varphi \uparrow$ στο $\mathbb{R} \Rightarrow 1-1$.

Άρα η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το 1.

Οπότε $(\gamma+1)\cdot e^{\gamma^2} = 2e \Leftrightarrow \gamma = 1$. Τελικά $f(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$.

B) Αφού $f(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$ προκύπτει από τη σχέση $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ ότι $\int_a^b 1\,dx = \int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow$

$$\int_a^b g(x)\,dx = b-a.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G:[a,b]\to\mathbb{R}$, με τύπο $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt - x + a$

Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b), με $G'(x) = g(x) - 1$

Επίσης, $G(a) = G(b) = 0$

Άρα, από το Θεώρημα Rolle, προκύπτει η ύπαρξη ενός τουλάχιστον $x_0 \in (a,b) \subset (0,1)$: $G'(x_0) = 0$, δηλ. $g(x_0) - 1 = 0$, δηλ. $g(x_0) = 1$.

Γ) Για $x=1$ η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$g(1) + g(e) = 1 + 1 + e \Rightarrow g(1) + g(e) = 2 + e$$

Για $x=e$ η ίδια σχέση γίνεται

$$e \cdot g(e) + g(1) = e + e^2 + 1$$

Οπότε $\begin{cases} g(1) + g(e) = 2+e \\ g(1) + e\,g(e) = e^2+e+1 \end{cases} \cdot(-e) \quad \begin{cases} -e\,g(1) - e\,g(e) = -2e - e^2 \\ g(1) + e\,g(e) = e^2+e+1 \end{cases}$

Προσθέτοντας κατά μέλη: $g(1)(1-e) = 1-e \Rightarrow g(1) = 1$

Οπότε $g(1) = g(x_0) (= 1)$ και $x_0 < 1$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την g στο $[x_0, 1]$:

Υπάρχει $\xi \in (x_0, 1) \subset (0,1)$: $g'(\xi) = 0$, δηλ. η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(\xi, g(\xi))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Θέμα 6ο A) i) Οι συναρτήσεις $f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=1-e^x$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση $f=f_1\circ f_2$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x)=\left(e^{1-e^x}\right)'=e^{1-e^x}\cdot\left(1-e^x\right)'=-e^{1-e^x}\cdot e^x=-e^{1-e^x+x}<0,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (διότι $e^a>0$, για κάθε $a\in\mathbb{R}$).

Άρα η f είναι $\downarrow$ στο $\mathbb{R}$.

ii) Επίσης, η f' είναι παραγωγίσιμη, με $f''(x)=\left(-e^{1-e^x+x}\right)'=$

$$=-e^{1-e^x+x}\cdot\left(1-e^x+x\right)'=-e^{1-e^x+x}\cdot\left(1-e^x\right)=$$

$$=e^{1-e^x+x}\cdot\left(e^x-1\right),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Άρα $f''(x)>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1=e^0 \overset{e^x\uparrow}{\Longleftrightarrow} x>0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$ και κυρτή στο $[0,+\infty)$.

η f έχει σημείο καμπής το $A(0,f(0))=A(0,1)$.

B) πλάγιες-οριζόντιες ασύμπτωτες στο $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{1-e^x}}{x}=\frac{e^{1-e^{-\infty}}}{-\infty}=\frac{e^{1-0}}{-\infty}=e\cdot\frac{1}{-\infty}=$$

$$=e\cdot 0=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-0\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{1-e^x}\right)=e.$$

Άρα η ευθεία $y=e$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

πλάγιες-οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1-e^x}}{x}=\frac{e^{1-\infty}}{+\infty}=\frac{e}{+\infty}=0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-0\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{1-e^x}\right)=e^{1-\infty}=e^{-\infty}=0$$

Άρα η ευθεία $\psi=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Γ) $\varepsilon: \psi - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$

$\varepsilon: \psi - e^{1-e^a} = -e^{1-e^a+a}\cdot(x-a)$

$\varepsilon: \psi = e^{1-e^a} - e^{1-e^a+a}\cdot(x-a)$

Δ) Για $\psi=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 0 = e^{1-e^a} - e^{1-e^a+a}\cdot(x-a) \Rightarrow$

$0 = e^{1-e^a} - e^{1-e^a}\cdot e^a\cdot(x-a) \Rightarrow$

$0 = e^{1-e^a}\cdot(1 - e^a\cdot(x-a)) \Rightarrow$

$0 = 1 - e^a(x-a)$ (διότι $e^{1-e^a}>0$)

$e^a\cdot(x-a) = 1 \Rightarrow x-a = e^{-a} \Rightarrow x = a+e^{-a}$

Άρα η (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(a+e^{-a}, 0)$

Δίνεται ότι $a'(t) = 2$ cm/sec, $t>0$.

Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Β είναι

$\left(a(t)+e^{-a(t)}\right)' = a'(t) - a'(t)\cdot e^{-a(t)} = 2-2e^{-a(t)}$

Άρα, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Β στη χρονική στιγμή t_0 όπου $a(t_0)=-1$ είναι

$2-2e^{-a(t_0)} = 2-2e$ cm/sec.

Θέμα 7ο | Α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = x'\cdot \ln(x+1) + x\cdot(\ln(x+1))' - (x+1)'\cdot \ln x - (x+1)\cdot(\ln x)'$$

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - \ln x - \frac{x+1}{x}, \quad x>0$$

$$f''(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{x^2+x+1}{(x^2+x)^2} > 0, \text{ για κάθε } x>0$$

Άρα $f' \uparrow$ και συνεχής στο $(0,+\infty)$.

Οπότε για το σύνολο τιμών της f' έχουμε

$$f'((0,+\infty)) = \left(\lim_{x\to 0^+} f'(x), \lim_{x\to+\infty} f'(x)\right) = (-\infty, 0) \quad [\text{διότι}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - \frac{x\ln x + x + 1}{x}\right) =$$

$$= 0 + 0 - \lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x + x + 1}{x} = -\frac{1}{0(+)} = -\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DL}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x}\right] =$$

$$= \ln 1 + 1 - 1 = 0 \,]$$

Άρα, από τη σχέση $f'((0,+\infty)) = (-\infty, 0)$, προκύπτει ότι $f'(x) < 0$, για κάθε $x>0$ $(0,+\infty)$.

$\Rightarrow f \downarrow$ στο

β' τρόπος Είναι $f'(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

Για $x>0$, εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $g(t) = \ln t$ στο διάστημα $[x, x+1]$:

οπότε υπάρχει $\xi_x \in (x, x+1)$: $g'(\xi_x) = g(x+1) - g(x)$

δηλ. $\frac{1}{\xi_x} = \ln(x+1) - \ln x$

Όμως $x < \xi_x < x+1 \xRightarrow[g' \downarrow]{g''(t) < 0} g'(x) > g'(\xi_x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\xi_x}$

Δηλαδή $\frac{1}{x} > \ln(x+1) - \ln x \xRightarrow{-\frac{1}{x+1} < 0} f'(x) < 0$

Άρα $\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x} < 0$

στο $(0, +\infty) \Rightarrow f \downarrow$ στο $(0, +\infty)$.

Β) $f \downarrow$ στο $(0, +\infty)$ και f συνεχής. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right)$

$= (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

[διότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x\ln(x+1) - x\ln x - \ln x) =$

$= \lim_{x\to+\infty} \left[x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \ln x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left(x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \lim_{x\to+\infty} (\ln x)\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} - (+\infty) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} - \infty =$

$= 1 - \infty = -\infty$

και

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x\ln(x+1) - (x+1)\cdot \ln x) = 0 - 1\cdot(-\infty) = +\infty$]

Γ) το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f (δηλ. στο $\mathbb{R}$)

άρα υπάρχει $x_0 > 0$: $f(x_0) = 0$, δηλ. $x_0 \ln(x_0+1) = (x_0+1)\cdot \ln x_0$

$\Leftrightarrow \ln(x_0+1)^{x_0} = \ln x_0^{x_0+1} \underset{1-1}{\overset{\ln}{\Longleftrightarrow}} (x_0+1)^{x_0} = x_0^{x_0+1}$

Δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \text{ με } \varphi(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt$$

[δηλ. $\varphi(x) = \int_x^1 f(t)\,dt + \int_1^{x+1} f(t)\,dt$, δηλ.

$\varphi(x) = \int_1^{x+1} f(t)\,dt - \int_1^x f(t)\,dt$, $x > 0$.]

Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ $\Rightarrow$ οι συναρτήσεις $\int_1^{x+1} f$, $\int_1^x f$ είναι παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$, άρα η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με

$\varphi'(x) = f(x+1)\cdot(x+1)' - f(x) = f(x+1) - f(x) < 0$,

για κάθε $x > 0$

(διότι $x < x+1 \xrightarrow{f\downarrow} f(x) > f(x+1)$)

Άρα η $\varphi \downarrow$ στο $(0,+\infty)$.

Επειδή $x^2+1 < x^2+3 \xrightarrow{\varphi\downarrow} \varphi(x^2+1) > \varphi(x^2+3) \Rightarrow$

$$\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)\,dt > \int_{x^2+3}^{x^2+4} f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

<u>β' τρόπος</u> Για τη συνάρτηση $F(t) = \int_1^t f(u)\,du$ εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[x^2+1, x^2+2]$, $[x^2+3, x^2+4]$ και παίρνουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (x^2+1, x^2+2)$, $\xi_2 \in (x^2+3, x^2+4)$:

$F'(\xi_1) = F(x^2+2) - F(x^2+1)$ και $F'(\xi_2) = F(x^2+4) - F(x^2+3)$

δηλ. $f(\xi_1) = F(x^2+2) - F(x^2+1)$ και $f(\xi_2) = F(x^2+4) - F(x^2+3)$

Όμως $\xi_1 < \xi_2 \xRightarrow{f\downarrow} f(\xi_1) > f(\xi_2) \Rightarrow$

$$F(x^2+2) - F(x^2+1) > F(x^2+4) - F(x^2+3) \Rightarrow$$

$$\int_1^{x^2+2} f(u)\,du - \int_1^{x^2+1} f(u)\,du > \int_1^{x^2+4} f(u)\,du - \int_1^{x^2+3} f(u)\,du$$

$$\Rightarrow \int_{x^2+1}^{x^2+2} f(u)\,du > \int_{x^2+3}^{x^2+4} f(u)\,du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Θέμα 8ο | A)

⊙ Η g είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) $\Rightarrow \int_0^t g(u)\,du$ είναι παραγωγίσιμη, άρα συνεχής στο $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^x \left(\int_0^t g(u)\,du\right) dt$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

⊙ Η συνάρτηση $\int_0^x \left(\frac{x}{2} + g(t)\right) dt$ γράφεται ως

$$\int_0^x \frac{x}{2}\,dt + \int_0^x g(t)\,dt = \frac{x}{2}\cdot(x-0) + \int_0^x g(t)\,dt =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \int_0^x g(t)\,dt.$$

Παραγωγίζοντας (ως προς x) την αρχική σχέση της υπόθεσης, παίρνουμε:

$$\left[\int_0^x \left(\int_0^t g(u)\,du\right) dt\right]' = \left(\frac{x^2}{2} + \int_0^x g(t)\,dt\right)' \Rightarrow$$

$$\int_0^x g(u)\,du = x + g(x) \quad (*) \xrightarrow[\text{παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R}]{g}$$

$$\left(\int_0^x g(u)\,du\right)' = (x + g(x))' \Rightarrow$$

$$g(x) = 1 + g'(x) \Rightarrow g'(x) - g(x) = -1 \xrightarrow{\cdot e^{-x}}$$

$$e^{-x}\cdot g'(x) - e^{-x}\cdot g(x) = -e^{-x} \Rightarrow$$

$$(e^{-x}\cdot g(x))' = (e^{-x})', \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Άρα $e^{-x}\cdot g(x) = e^{-x} + c$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (c: σταθερά)

Για $x=0$ η $(*)$ δίνει: $0 = 0 + g(0) \Rightarrow g(0) = 0$.

οπότε, για $x=0$ έχουμε: $e^0\cdot g(0) = e^0 + c \Rightarrow c = -1$.

Άρα $e^{-x}\cdot g(x) = e^{-x} - 1 \Rightarrow \underline{g(x) = 1 - e^{x},\ x\in\mathbb{R}}$

B) i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = \left(\int_0^x g(t)\,dt\right)' = g(x) = 1 - e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Οπότε, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 = e^0 \overset{e^x \uparrow}{\Longleftrightarrow} x < 0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$

Η f είναι $\uparrow$ στο $(-\infty, 0]$ και $\downarrow$ στο $[0, +\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0, το $f(0) = 0$

ii) $f(x) = \int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x (1 - e^t)\,dt = \left[t - e^t\right]_0^x = 1 + x - e^x, \ x \in \mathbb{R}.$

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0) \neq f(1)$

(αφού $f(0) = 0$, $f(1) = 2 - e$).

Επίσης, παρατηρούμε ότι $2 - e < -1/2 < 0$, δηλ.

$$f(1) < -\frac{1}{2} < f(0).$$

Άρα, από το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $x_0 \in (0,1)$: $f(x_0) = -1/2$. Το x_0 αυτό είναι μοναδικό, διότι η f είναι $\downarrow$ στο $(0,1)$, άρα και 1-1.

<u>β' τρόπος</u> Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Bolzano για την $m : [0,1] \to \mathbb{R}$, με $m(x) = 2f(x) + 1$.

iii) <u>Στο $-\infty$</u>

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + x - e^x}{x} \overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{(1 + x - e^x)'}{x'} = \lim_{x \to -\infty} (1 - e^x) = 1.$$

και $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to -\infty} (1 - e^x) = 1 - e^{-\infty} = 1 - 0 = 1$

Άρα η ευθεία $\psi = x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

Στο $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x-e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+1-\frac{e^x}{x}\right)=$$

$=0+1-(+\infty)=-\infty\notin\mathbb{R}$, άρα η C_f δεν έχει πλάγιες/οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$.

(χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=e^{+\infty}=+\infty).$$

Γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $K:[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$K(x)=f(x)+g(x)+1.$$

Η K είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως άθροισμα συνεχών και

$$K(0)=f(0)+g(0)+1=0+0+1=1>0$$

$$K(1)=f(1)+g(1)+1=(2-e)+(1-e)+1=4-2e=$$

$$=2(2-e)<0,\ \text{διότι } 2<e.$$

Άρα, από το Θεώρημα Βολζάνο προκύπτει η ύπαρξη κάποιου $\xi\in(0,1)$: $K(\xi)=0$, δηλ. $f(\xi)+g(\xi)=-1$.

Επίσης, η K είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, με $K'(x)=$

$=f'(x)+g'(x)=g(x)+g'(x)=1-e^x-e^x=1-2e^x<0$ στο $(0,1)$ (διότι για $x>0\Rightarrow e^x>1\Rightarrow 2e^x>2\Rightarrow -2e^x<-2\Rightarrow$ $\Rightarrow 1-2e^x<-1<0$). Άρα η K είναι $\downarrow$ στο $(0,1)$, άρα και 1-1. Οπότε το ξ που βρήκαμε παραπάνω είναι μοναδικό.

Δ) Από το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,\xi]\Rightarrow$ υπάρχει

$$\xi_1\in(0,\xi)\subset(0,1):\ f'(\xi_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{f(\xi)}{\xi}.$$

Από το Θ.Μ.Τ. για την g στο $[0,\xi] \Rightarrow$ υπάρχει

$\xi_2 \in (0,\xi) \subset (0,1)$: $g'(\xi_2) = \dfrac{g(\xi)-g(0)}{\xi-0} = \dfrac{g(\xi)}{\xi}$.

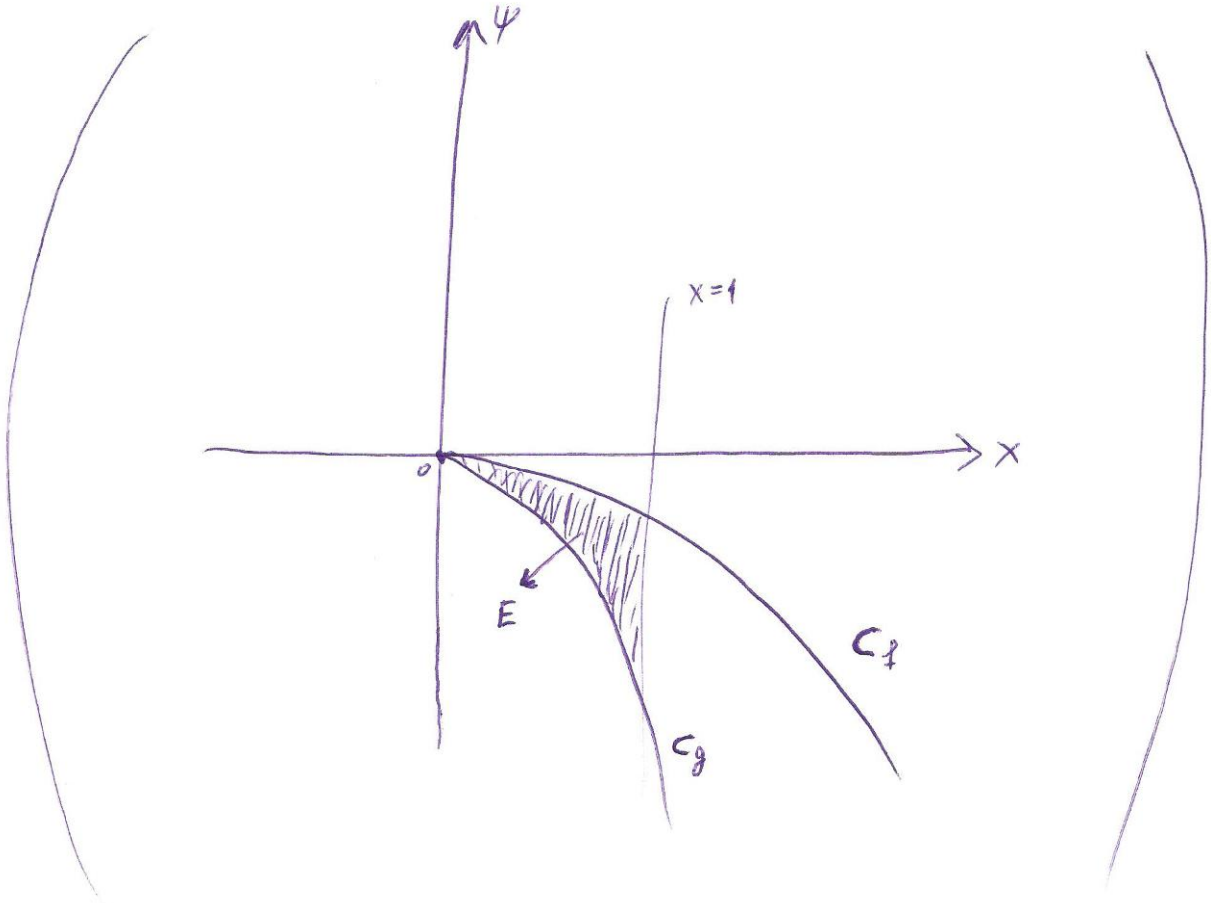
Οπότε, $g(\xi_1) + g'(\xi_2) = f'(\xi_1) + g'(\xi_2) =$

$$= \frac{f(\xi)}{\xi} + \frac{g(\xi)}{\xi} = \frac{f(\xi)+g(\xi)}{\xi} \overset{\Gamma)}{=} \frac{-1}{\xi}.$$

Ε) Έχουμε ότι $f(0)-g(0) = 0$ και $f(x)-g(x) = 1+x-e^x - (1-e^x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$



Θέμα 9ο | Α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο

$$f(x) = e^{|z-9|^{2014}\cdot x} - |3z+5|^{2014}\cdot x - 1.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = e^{|z-9|^{2014}\cdot x}\cdot\left(|z-9|^{2014}\cdot x\right)' - |3z+5|^{2014}\cdot(x)'$$

$$f'(x) = e^{|z-9|^{2014}\cdot x}\cdot|z-9|^{2014} - |3z+5|^{2014}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Επίσης, από τα βασικά της άσκησης προκύπτει ότι

$$f(x) \geq 0 = f(0), \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Οπότε
- η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0
- το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο 0

$\xrightarrow{\text{Fermat}} f'(0)=0.$

Όμως, $f'(0) = |z-9|^{2014} - |3z+5|^{2014}$. Άρα θα πρέπει

$$|z-9|^{2014} - |3z+5|^{2014} = 0 \Rightarrow |z-9|^{2014} = |3z+5|^{2014}$$

Β) Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $|z-9| = |3z+5|$

άρα $|z-9|^2 = |3z+5|^2 \Leftrightarrow (z-9)(\overline{z-9}) = (3z+5)(\overline{3z+5}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (z-9)(\bar z-9) = (3z+5)(3\bar z+5) \Leftrightarrow$$

$$z\bar z - 9z - 9\bar z + 81 = 9z\bar z + 15z + 15\bar z + 25 \Leftrightarrow$$

$$8|z|^2 + 24(z+\bar z) = 56 \Leftrightarrow$$

$$|z|^2 + 3(z+\bar z) = 7 \quad \xleftrightarrow{z=x+yi}$$

$$x^2+y^2+3\cdot 2x = 7 \Leftrightarrow$$

$$(x^2+2\cdot 3\cdot x+9) + y^2 = 7+9$$

$$(x+3)^2 + y^2 = 4^2$$

Άρα οι εικόνες του z κινούνται στον κύκλο κέντρου $K(-3,0)$ και ακτίνας 4, δηλαδή $|z+3| = 4$

Γ) Έστω $w = x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Τότε $w - wi = (x+yi) - (x+yi)i =$

$= x+yi-xi+y = (x+y)+(y-x)i$. Οπότε από την σχέση $w - wi = \frac{1}{k} - ki \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = \dfrac{1}{k} \\ y-x = -k \end{cases} \xrightarrow[\text{του } k]{\text{απαλοιφή}} x+y = \frac{1}{x-y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-y^2 = 1.$$

Άρα οι εικόνες του w κινούνται στην ισοσκελή υπερβολή

$x^2-y^2=1$

Δ) Λύνουμε το σύστημα των δύο γεωμετρικών τόπων.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+6x=7 \\ x^2-y^2=1 \end{array}\right\} \xrightarrow{(+)} 2x^2+6x=8 \Rightarrow x^2+3x-4=0 \Rightarrow x=-4 \text{ ή } 1$$

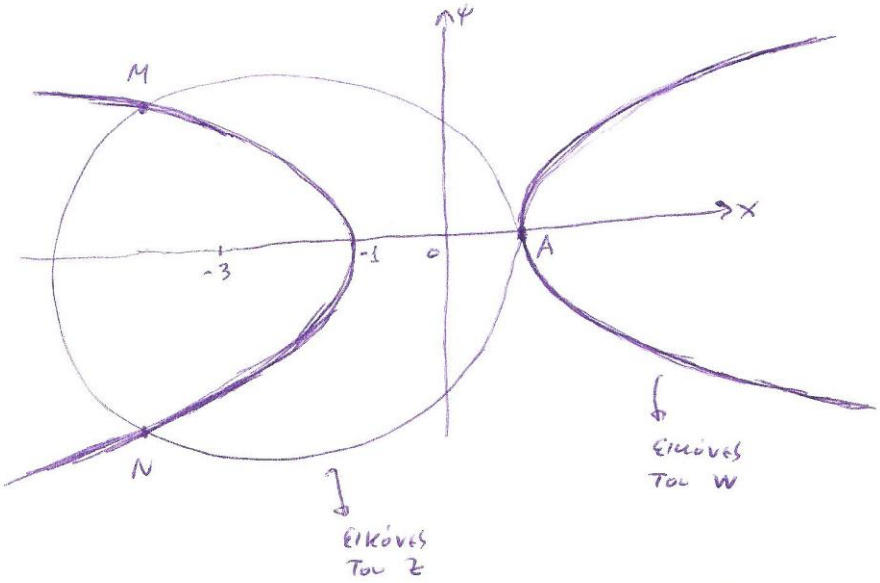
Για $x=-4 \Rightarrow y^2=15 \Rightarrow y=\pm\sqrt{15}$

Για $x=1 \Rightarrow y=0.$

Άρα οι δύο γεωμετρικοί τόποι τέμνονται στα σημεία

$M(-4,\sqrt{15})$, $N(-4,-\sqrt{15})$, $A(1,0)$.

Οπότε $z=w$ όταν $z=-4\pm\sqrt{15}\,i$ ή $z=1$.



Ε) i) Θα ισχύει $|z_1+3|=4$ και $|z_2+3|=4$.

Άρα $|z_1+3|^2=16 \Rightarrow (z_1+3)(\overline{z_1+3})=16 \Rightarrow (z_1+3)(\bar{z}_1+3)=16 \Rightarrow$

$z_1+3=\dfrac{16}{\bar{z}_1+3}$. Παρόμοια προκύπτει η ισότητα

$z_2+3=\dfrac{16}{\bar{z}_2+3}$. $\left(\text{Άρα } z_k=\dfrac{16}{\bar{z}_k+3}-3,\ k=1,2\right)$.

ii) Είναι: $z_1 - z_2 = \left(\frac{16}{\bar{z}_1+3} - 3\right) - \left(\frac{16}{\bar{z}_2+3} - 3\right) =$

$$= 16\left(\frac{1}{\bar{z}_1+3} - \frac{1}{\bar{z}_2+3}\right) = 16\,\frac{\bar{z}_2-\bar{z}_1}{(\bar{z}_1+3)(\bar{z}_2+3)}$$

Άρα $\frac{z_1-z_2}{\bar{z}_2-\bar{z}_1} = \frac{16}{(\bar{z}_1+3)(\bar{z}_2+3)} = \frac{4\cdot 4}{(\bar{z}_1+3)(\bar{z}_2+3)} = \frac{|z_1+3|\cdot|z_2+3|}{(\bar{z}_1+3)\cdot(\bar{z}_2+3)}$

$$= \frac{|\overline{z_1+3}|}{\bar{z}_1+3}\cdot\frac{|\overline{z_2+3}|}{\bar{z}_2+3} = \frac{|\bar{z}_1+3|}{\bar{z}_1+3}\cdot\frac{|\bar{z}_2+3|}{\bar{z}_2+3}$$

Θέμα 10ο A)

Καταρχήν, αφού η f είναι συνεχής, έπεται ότι οι συναρτήσεις f^2, $x \longmapsto x^4+2x^2+1$ και $x \longmapsto x\cdot f(x^2)\cdot(x^4+1)$ είναι συνεχείς στο $[1,2]$.

Άρα τα τρία ολοκληρώματα είναι καλώς ορισμένα.

Για το $\int_1^{\sqrt{2}} x\cdot f(x^2)\cdot(x^4+1)\,dx$ θέτουμε $u=x^2$. Τότε

$du = 2x\,dx \Rightarrow x\cdot dx = du/2$.

$$\begin{cases} \text{Για } x=1 \Rightarrow u=1 \\ \text{Για } x=\sqrt{2} \Rightarrow u=2. \end{cases}$$

Άρα $\int_1^{\sqrt{2}} x\cdot f(x^2)\cdot(x^4+1)\,dx = \int_1^2 f(u)\cdot(u^2+1)\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_1^2 f(x)\cdot(x^2+1)\,dx.$

Άρα η αρχική σχέση των ολοκληρωμάτων γίνεται:

$$\int_1^2 f^2(x)\,dx + \int_1^2 (x^4+2x^2+1)\,dx = 4\cdot\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)\cdot(x^2+1)\,dx \Rightarrow$$

$$\int_1^2 f^2(x)\,dx + \int_1^2 (x^2+1)^2\,dx = 2\int_1^2 f(x)\cdot(x^2+1)\,dx \Rightarrow$$

$$\int_1^2 \left(f^2(x) + (x^2+1)^2 - 2f(x)\cdot(x^2+1)\right)dx = 0 \Rightarrow$$

$$\int_1^2 \left(f(x) - (x^2+1)\right)^2 dx = 0$$

Η συνάρτηση $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, με $g(x)=\left(f(x)-(x^2+1)\right)^2$ είναι μη αρνητική στο $[1,2]$. Αν υποθέσουμε ότι η g δεν είναι παντού μηδέν στο $[1,2]$, τότε $\int_1^2 g(x)\,dx > 0$, άτοπο.

Άρα $g(x)=0$, για κάθε $x\in[1,2]$, δηλ. $\left(f(x)-(x^2+1)\right)^2=0$, $x\in[1,2] \Rightarrow$

$f(x)-(x^2+1)=0 \Rightarrow f(x)=x^2+1$, $x\in[1,2]$

B) i) α' τρόπος

Για το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{a-b} e^{f(x)}\,dx$ θέτουμε

$u=-x$. Τότε $du=-dx$ και $\begin{cases} \text{για } x=0 \Rightarrow u=0 \\ \text{για } x=a-b \Rightarrow u=b-a \end{cases}$

Άρα $I = \int_0^{b-a} e^{f(-u)}(-du) = -\int_0^{b-a} e^{f(-u)}du \xlongequal[\text{στο } \mathbb{R}]{f \text{ άρτια}}$

$= -\int_0^{b-a} e^{f(u)}du$, άρα $I + \int_0^{b-a} e^{f(u)}du = 0$, δηλ.

$$\int_0^{a-b} e^{f(x)}dx + \int_0^{b-a} e^{f(x)}dx = 0$$

β' τρόπος Έστω $a \in \mathbb{R}$ τυχαίο και σταθερό.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\varphi(x) = \int_0^{a-x} e^{f(t)}dt + \int_0^{x-a} e^{f(t)}dt.$$

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$) $\Rightarrow \int_0^{a-x} e^{f(t)}dt, \int_0^{x-a} e^{f(t)}dt$ παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$),

με $\varphi'(x) = \left(\int_0^{a-x} e^{f(t)}dt\right)' + \left(\int_0^{x-a} e^{f(t)}dt\right)' =$

$= e^{f(a-x)} \cdot (a-x)' + e^{f(x-a)} \cdot (x-a)' =$

$= -e^{f(a-x)} + e^{f(x-a)} \xlongequal[\text{διότι } f \text{ άρτια στο } \mathbb{R}]{f(a-x) = f(x-a)} 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα η φ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, δηλαδή υπάρχει σταθερό $c \in \mathbb{R}$: $\varphi(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = a \Rightarrow \varphi(a) = c$, δηλ. $\int_0^0 e^{f(t)}dt + \int_0^0 e^{f(t)}dt = c \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 0$. Τελικά προκύπτει: $\int_0^{a-x} e^{f(t)}dt + \int_0^{x-a} e^{f(t)}dt = 0$,

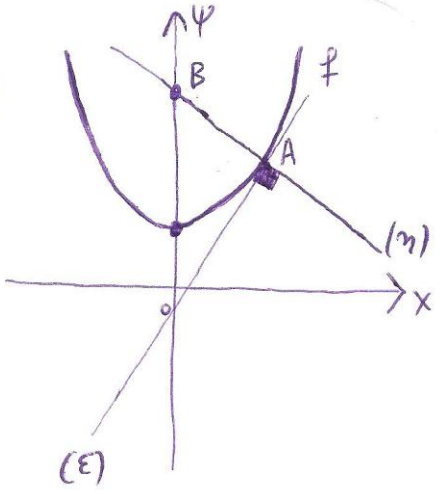
για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για $x = b$ έχουμε τη ζητούμενη σχέση.

γ' τρόπος (παρόμοιος με τον β' τρόπο). Δείχνουμε ότι

$$\boxed{\int_0^{x} e^{f(t)}dt + \int_0^{-x} e^{f(t)}dt = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.}$$

ΜΕΤΑ για $x = a-b$ προκύπτει το ζητούμενο.

ii)



Επειδή στη χρονική στιγμή t_0 είναι $a(t_0)>0$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $a>0$.

Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι $f'(a)=2a>0$, και $\varepsilon \perp \eta \Rightarrow$ ο συντελεστής διεύθυνσης της (η) είναι $-\frac{1}{2a}$.

Οπότε η εξίσωση της (η) είναι:

$$\eta:\ \psi - f(a) = -\frac{1}{2a}(x-a) \qquad (1)$$

Για $x=0$ στη σχέση (1) βρίσκουμε την τεταγμένη του σημείου B. Δηλαδή $\psi_B - f(a) = -1/2a \cdot (0-a)$

$$\psi_B = \frac{1}{2} + f(a)$$

$$\psi_B = \frac{1}{2} + a^2+1$$

$$\psi_B = a^2 + 3/2.$$

Οπότε $B\left(0,\ a^2+\frac{3}{2}\right)$.

Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του B τη χρονική στιγμή $t>0$ είναι $\left(a^2(t)+\frac{3}{2}\right)' = 2\,a(t)\cdot a'(t)$, οπότε τη χρονική στιγμή t_0 είναι $2\,a(t_0)\cdot a'(t_0) = 2\cdot 1\cdot a'(t_0) = 2\,a'(t_0) =$

$= 2\cdot$ (ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του A τη χρονική στιγμή t_0)