Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Иркутский государственный университет»

Институт математики, экономики и информатики

Е. А. Головко

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

руководство к решению задач

В двух частях

Часть 2

Учебное пособие

ИРКУТСК — 2014

Оглавление

Глава 1

Смешанная задача для уравнений гиперболического типа

1.1. Однородная смешанная задача для волнового уравнения. Общая схема метода Фурье

Математическое описание процесса поперечных колебаний струны конечной длины состоит из уравнения, начальных и граничных условий. Граничные условия показывают, что происходит на концах струны в любой момент времени. Начальные условия задают профиль струны в начальный момент времени и сообщенный струне начальный импульс, обусловливающий некоторое распределение скоростей точек струны. Такую задачу называют *смешанной задачей.*

Определение. Смешанную задачу называют *однородной*, если в ней однородно уравнение и однородны (нулевые) граничные условия. Если в задаче неоднородно уравнение или граничные условия (или и то, и другое вместе), то задачу называют *неоднородной.*

Для исследования смешанной задачи во многих случаях удобен так называемый метод Фурье, или метод разделения переменных. Применение этого метода проиллюстрируем на исследовании однородной смешанной задачи для уравнения колебаний струны.

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях струны длины l, закрепленной на концах. Итак, будем искать решение задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{1.1}$$

$$u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0, \tag{1.2}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x). \tag{1.3}$$

Требуется найти нетривиальное регулярное в полуполосе $0 < x < l, t > 0$ решение однородного уравнения (1.1), удовлетворяющее однородным граничным условиям (1.2) и начальным условиям (1.3), где $\varphi(x), \psi(x)$ — заданные достаточно гладкие действительные функции.

1. Найдем вспомогательные решения уравнения (1.1), не равные тождественно нулю, удовлетворяющие однородным граничным условиям (1.2) и представимые в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.1), получаем

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t). \tag{1.5}$$

Разделив обе части равенства (1.5) на $a^2X(x)T(t) \neq 0$, имеем

$$\frac{XT''}{a^2XT} = \frac{a^2X''T}{a^2XT} = -\lambda, \tag{1.6}$$

где λ — некоторая постоянная, так как функции разных переменных равны друг другу тождественно только тогда, когда обе они равны одной и той же константе. Следовательно, из соотношения (1.6) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $X(x)$ и $T(t)$:

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{1.7}$$

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{1.8}$$

Кроме того, из граничных условий (1.2) можно получить условия на функцию X

$$u\big|_{x=0} = X(0))T(t) = 0,$$

$$u\big|_{x=l} = X(l))T(t) = 0.$$

Так как $T(t) \neq 0$ (иначе получим для любого t тривиальное решение $u \equiv 0$), из последних равенств получим

$$X(0) = 0, X(l) = 0.$$

2. Для нахождения функции $X(x)$ приходим к простейшей задаче Штурма — Лиувилля

$$\begin{aligned} &X'' + \lambda X = 0, \\ &X(0) = 0, X(l) = 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Необходимо найти такие значения параметра λ, называемые собственными, при которых задача (1.9) имеет ненулевые решения, а также найти эти ненулевые решения, называемые собственными функциями.

Общее решение уравнения (1.7) дается формулами

$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, если $\lambda < 0$;

$X(x) = C_1 + C_2 x$, если $\lambda = 0$;

$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$, если $\lambda > 0$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Из выражения для общего решения уравнения (1.7) и граничных условий задачи (1.9) следует, что при $\lambda \leq 0$ $C_1 = C_2 = 0$, т. е.
$X(x) \equiv 0$. При $\lambda > 0$ имеем

$$X(0) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}0 + C_2 \sin\sqrt{\lambda}0 = 0,$$

следовательно, $C_1 = 0$. Тогда

$$X(l) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Так как $C_2 \neq 0$, то

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Тогда

$$\sqrt{\lambda}l = \pi n.$$

Или $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n = 1, 2, ...$ — собственные значения задачи Штурма — Лиувилля. Соответствующая каждому собственному значению собственная функция определяется с точностью до константы

$$X_n(x) = C_2 \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Без ограничения общности положим $C_2 = 1$, тогда собственные функции примут вид

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, \dots .$$

В зависимости от вида граничных условий исходной задачи могут быть получены различные виды задачи Штурма — Лиувилля. Получающиеся при этом собственные значения и собственные функции представлены в табл. 1:

Таблица 1

Собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля

Граничные условия	Задача Штурма – Лиувилля	Собственные значения λ_n	Собственные функции X_n
$u\|_{x=0} = 0,$ $u\|_{x=l} = 0$	$X'' + \lambda X = 0,$ $X(0) = 0, X(l) = 0$	$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,$ $n = 1, 2, ...$	$X_n = \sin\frac{\pi n x}{l},$ $n = 1, 2, ...$
$u_x\|_{x=0} = 0,$ $u\|_{x=l} = 0$	$X'' + \lambda X = 0,$ $X'(0) = 0, X(l) = 0$	$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2,$ $n = 0, 1, 2, ...$	$X_n = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l},$ $n = 0, 1, 2, ...$
$u\|_{x=0} = 0,$ $u_x\|_{x=l} = 0$	$X'' + \lambda X = 0,$ $X(0) = 0, X'(l) = 0$	$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2,$ $n = 0, 1, 2, ...$	$X_n = \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l},$ $n = 0, 1, 2, ...$
$u_x\|_{x=0} = 0,$ $u_x\|_{x=l} = 0$	$X'' + \lambda X = 0,$ $X'(0) = 0, X'(l) = 0$	$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,$ $n = 0, 1, 2, ...$	$X_n = \cos\frac{\pi n x}{l},$ $n = 0, 1, 2, ...$

3. Найдем теперь решение уравнения (1.8), которое при $\lambda = \lambda_n$ имеет вид

$$T_n'' + a^2\lambda_n T_n = 0.$$

Его решение

$$T_n(t) = A_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin a\sqrt{\lambda_n}t.$$

Или

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{a\pi nt}{l} + B_n \sin \frac{a\pi nt}{l},$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные. Таким образом, при любых A_n и B_n все функции

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos \frac{a\pi nt}{l} + B_n \sin \frac{a\pi nt}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

удовлетворяют уравнению (1.1) и условиям (1.2).

4. Рассмотрим бесконечный ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{a\pi nt}{l} + B_n \sin \frac{a\pi nt}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \qquad (1.10)$$

Если этот ряд сходится и сходятся ряды, полученные из него дифференцированием два раза по x и два раза по t, то ряд (1.10) представляет решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2).

5. Найдем A_n и B_n так, чтобы функция (1.10) удовлетворяла условиям (1.3). Имеем

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x), \qquad (1.11)$$

$$u_t\big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{l} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \psi(x). \tag{1.12}$$

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ разложим в ряды Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля, в рассматриваемом случае по $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{1.13}$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{1.14}$$

где

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Подставляя (1.13) в (1.11), а (1.14) в (1.12), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{l} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Сравнение этих рядов показывает, что для выполнения начальных условий надо положить

$$A_n = \varphi_n, \quad \frac{an\pi}{l} B_n = \psi_n.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \\ B_n &= \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Учитывая равенства (1.15), из формул (1.10) получим решение рассматриваемой смешанной задачи

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n\cos\frac{a\pi nt}{l}+\frac{2}{an\pi}\psi_n\sin\frac{a\pi nt}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Пример 1.1 (пример выполнения задачи 11).

Решить смешанную задачу для уравнения колебаний струны:

$$u_{tt}=u_{xx}, \tag{1.16}$$

$$u|_{x=0}=0,\, u|_{x=2}=0, \tag{1.17}$$

$$u|_{t=0}=0,\, u_t|_{t=0}=3\sin\frac{\pi x}{2}+6\sin\frac{3\pi x}{2}. \tag{1.18}$$

1. Эта задача однородна, поэтому решение будем искать в виде

$$u(x,t)=X(x)T(t). \tag{1.19}$$

Подставляя (1.19) в (1.16), получаем

$$X(x)T''(t)=X''(x)T(t).$$

Разделив обе части последнего равенства на $X(x)T(t)\neq 0$, имеем

$$\frac{T''}{T}=\frac{X''}{X}=-\lambda, \tag{1.20}$$

2. Используя условия (1.17), приходим к задаче Штурма — Лиувилля (можно использовать данные табл. 1; у нас $a = 1, l = 2$)

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, X(2) = 0. \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2, n = 1, 2, \dots ;$$

$$X_n = \sin\frac{\pi n x}{2}, n = 1, 2, \dots .$$

3. Из равенства (1.20) получим уравнение

$$T_n'' + \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 T_n = 0.$$

Его решение

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi n t}{2} + B_n \sin\frac{\pi n t}{2},$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

4. Таким образом, решение уравнения (1.16), удовлетворяющее граничным условиям (1.17), примет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi n t}{2} + B_n \sin\frac{\pi n t}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}. \tag{1.21}$$

Определим коэффициенты A_n и B_n, используя условия (1.18)

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{2} = 0,$$

$$u_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{2}B_n \sin\frac{n\pi x}{2} = 3\sin\frac{\pi x}{2} + 6\sin\frac{3\pi x}{2}.$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых $\sin\frac{n\pi x}{2}$. Из первого равенства следует, что все $A_n = 0$. Сравнивая коэффициенты второго равенства, имеем

при $n = 1$: $\quad \frac{\pi}{2}B_1 = 3, \text{следовательно}, B_1 = \frac{6}{\pi};$

при $n = 3$: $\quad \frac{3\pi}{2}B_3 = 6, \text{следовательно}, B_3 = \frac{4}{\pi};$

при $n = 1, 2, \ldots$ и $n \neq 1, n \neq 3$: $\quad B_n = 0.$

Подставим найденные коэффициенты в решение (1.21), получим

$$u(x,t) = \frac{6}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2}\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{4}{\pi}\sin\frac{3\pi t}{2}\sin\frac{3\pi x}{2}.$$

Ответ. $u(x,t) = \frac{6}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2}\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{4}{\pi}\sin\frac{3\pi t}{2}\sin\frac{3\pi x}{2}.$

Пример 1.2 (пример выполнения задачи 13).

Решить смешанную задачу для уравнения колебаний струны:

$$u_{tt} = 25u_{xx}, \tag{1.22}$$

$$u_x\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=\frac{3}{2}} = 0, \tag{1.23}$$

$$u\big|_{t=0} = 14\cos 3\pi x,\ u_t\big|_{t=0} = 0. \tag{1.24}$$

1. Эта задача однородна, поэтому решение будем искать в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{1.25}$$

Подставляя (1.25) в (1.22), получаем

$$X(x)T''(t) = 25X''(x)T(t).$$

Разделив обе части последнего равенства на $25X(x)T(t) \neq 0$, имеем

$$\frac{T''}{25T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \tag{1.26}$$

2. Используя условия (1.23), приходим к задаче Штурма — Лиувилля (можно использовать данные табл. 1;
у нас $a = 5, l = \frac{3}{2}$):

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = 0, X(\frac{3}{2}) = 0; \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{3}\right)^2, n = 0, 1, 2, \dots ;$$

$$X_n = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{3}, n = 0, 1, 2, \dots .$$

3. Из равенства (1.26) получим уравнение

$$T_n'' + \left(\frac{5(2n+1)\pi}{3}\right)^2 T_n = 0.$$

Его решение

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{5(2n+1)\pi t}{3} + B_n \sin\frac{5(2n+1)\pi t}{3},$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

4. Таким образом, решение уравнения (1.22), удовлетворяющее граничным условиям (1.23), примет вид

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{5(2n+1)\pi t}{3} + B_n \sin\frac{5(2n+1)\pi t}{3}\right) \times \\ \times \cos\frac{(2n+1)\pi x}{3}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Определим коэффициенты A_n и B_n, используя условия (1.24):

$$u|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{(2n+1)\pi x}{3} = 14\cos 3\pi x,$$

$$u_t\big|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(2n+1)\pi}{3} B_n \cos\frac{(2n+1)\pi x}{3} = 0.$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых $\cos\frac{(2n+1)\pi x}{3}$. Из второго равенства следует, что все $B_n = 0$. Сравнивая коэффициенты первого равенства, получим

при $n = 4$: $\quad A_4 = 14,$

при $n \neq 4$: $\quad A_n = 0.$

Подставим найденные коэффициенты в решение (1.27), имеем

$$u(x,t) = 14\cos 15\pi t \cos 3\pi x.$$

Ответ. $u(x,t) = 14\cos 15\pi t \cos 3\pi x.$

1.2. Однородная смешанная задача для произвольного уравнения гиперболического типа

Метод Фурье применим для исследования более общих задач. Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\begin{gathered} A(t)u_{tt} + C(x)u_{xx} + \\ + D(t)u_t + E(x)u_x + (F_1(t) + F_2(x))u = 0 \end{gathered} \tag{1.28}$$

с достаточно гладкими коэффициентами A, C, D, E, F_1, F_2, причем $A(t) \geq a_0 > 0, C(x) \leq c_0 < 0$, а a_0 и c_0 — фиксированные постоянные. Для уравнения (1.28) поставим следующую задачу: найти дважды непрерывно дифференцируемое при

$0 < x < l, t > 0$ решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} &(\alpha_0 u + \beta_0 u_x)\big|_{x=0} = 0, \\ &(\alpha_1 u + \beta_1 u_x)\big|_{x=l} = 0 \end{aligned} \tag{1.29}$$

и начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \tag{1.30}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ — заданные постоянные, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции.

Точно так же, как и для уравнения колебаний струны, сначала найдем решения уравнения (1.28) вида

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{1.31}$$

удовлетворяющие граничным условиям (1.29). В результате подстановки (1.31) в уравнение (1.28) получим

$$A(t)XT'' + C(x)X''T + D(t)XT' + E(x)X'T + \\ + (F_1(t) + F_2(x))XT = 0.$$

Или

$$\frac{A(t)T''}{T} + \frac{D(t)T'}{T} + F_1(t) = -\frac{C(x)X''}{X} - \frac{E(x)X'}{X} + F_2(x) = -\lambda,$$

где λ — постоянная. Эти равенства представляют собой отдельные уравнения для X и для T:

$$\frac{A(t)T''}{T} + \frac{D(t)T'}{T} + F_1(t) = -\lambda,$$
$$-\frac{C(x)X''}{X} - \frac{E(x)X'}{X} + F_2(x) = -\lambda.$$

Или

$$C(x)X'' - E(x)X' + (F_2(x) + \lambda)X = 0,$$
$$A(t)T'' + D(t)T' + (F_1(t) + \lambda)T = 0. \qquad (1.32)$$

Подставив (1.31) в граничные условия (1.29), получим граничные условия на функцию $X(x)$. Таким образом, для определения функции $X(x)$ имеем задачу Штурма — Лиувилля:

$$\begin{aligned} &C(x)X'' - E(x)X' + (F_2(x) + \lambda)X = 0, \\ &(\alpha_0 X + \beta_0 X')\big|_{x=0} = 0, \\ &(\alpha_1 X + \beta_1 X')\big|_{x=l} = 0, \end{aligned} \qquad (1.33)$$

решив которую, найдем собственные значения λ_n и собственные функции $X_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$.

При найденных в задаче (1.33) λ_n найдем общие решения $T_n(t)$ уравнений (1.32), которые будут содержать две группы произвольных постоянных A_n и B_n, $n = 1, 2, \ldots$. При этом функции $u_n = X_n(x)T_n(t)$ при любом n и любых A_n и B_n удовлетворяют уравнению (1.28) и граничным условиям (1.29). Рассмотрим ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t). \qquad (1.34)$$

Предполагая, что этот ряд и ряды, полученные из него двухкратным дифференцированием по x и по t, равномерно сходятся, подберем A_n и B_n так, чтобы выполнялись начальные условия (1.30). Подставляя найденные A_n и B_n в (1.34), получим решение исходной задачи.

Пример 1.3.

Решить смешанную задачу для уравнения гиперболического типа:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4u, \\ u\big|_{x=0} = 0, \qquad u\big|_{x=1} = 0, \\ u\big|_{x=0} = x^2 - x, \qquad u_t\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Эта задача является однородной. Ее решение будем искать в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Подставив эту функцию в исходное уравнение, получим

$$T''(t)X(x) = X''(x)T(t) - 4X(x)T(t).$$

Поделив последнее равенство на $X(x)T(t) \neq 0$, имеем

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} - 4.$$

Получилось равенство, в котором левая часть есть функция, зависящая от переменной t, а правая часть — от переменной x. Равенство возможно, если его правая и левая части равны одной и той же константе $-\lambda$. Причем в правой части равенства есть слагаемое, которое не зависит ни от x, ни от t. Его рациональнее перенести в левую часть, чтобы получить уравнение для функции X как можно проще:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + 4 = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Эти равенства представляют собой отдельные уравнения для $X(x)$ и для $T(t)$:

$$\frac{T'' + 4T}{T} = -\lambda,$$

$$\frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Или

$$X'' + \lambda X = 0,$$

$$T'' + (4 + \lambda)T = 0.$$

Из граничных условий задачи имеем

$$u\big|_{x=0} = X(0)T(t) = 0,$$

$$u\big|_{x=1} = X(1)T(t) = 0.$$

Откуда (так как $T(t) \neq 0$)

$$X(0) = 0, \quad X(1) = 0.$$

Итак, для определения функции $X(x)$ получили задачу Штурма — Лиувилля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(1) = 0. \end{cases}$$

Собственные значения этой задачи

$$\lambda_n = (\pi n)^2, \quad n = 1, 2, \dots \,.$$

Им соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, \dots \,.$$

При найденных λ_n решим уравнение для функции $T(t)$

$$T_n'' + (4 + (\pi n)^2)T_n = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$T_n(t) = A_n \cos\sqrt{4 + (\pi n)^2}t + B_n \sin\sqrt{4 + (\pi n)^2}t, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos\sqrt{4 + (\pi n)^2}t + B_n \sin\sqrt{4 + (\pi n)^2}t) \sin n\pi x.$$

Предполагая, что этот ряд и ряды, полученные из него двухкратным дифференцированием по x и по t, равномерно сходятся, подберем A_n и B_n так, чтобы выполнялись начальные условия задачи:

$$u\big|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x = x^2 - x,$$

$$u_t\big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sqrt{4 + (\pi n)^2} \sin n\pi x = 0.$$

Разложим функцию $x^2 - x$ в ряд Фурье по собственным функциям $X_n(x) = \sin \pi n x, n = 1, 2, \ldots$:

$$x^2 - x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin n\pi x,$$

где

$$\alpha_n = 2\int_0^1 (x^2 - x) \sin \pi n x dx.$$

Очевидно,

$$A_n = \alpha_n,$$

$$B_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Найдем α_n:

$$\alpha_n = 2\int_0^1 (x^2 - x)\sin \pi n x dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 - x, du = (2x-1)dx, \\ dv = \sin \pi n x dx, v = -\frac{1}{\pi n}\cos \pi n x \end{array} \right\} =$$

$$= -2(x^2 - x)\frac{1}{\pi n}\cos \pi n x \Big|_0^1 + \frac{2}{\pi n}\int_0^1 (2x-1)\cos \pi n x dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\int_0^1 (2x-1)\cos \pi n x dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = 2x - 1, du = 2dx, \\ dv = \cos \pi n x dx, v = \frac{1}{\pi n}\sin \pi n x \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{(\pi n)^2}(2x-1)\sin \pi n x \Big|_0^1 - \frac{4}{(\pi n)^2}\int_0^1 \sin \pi n x dx =$$

$$= \frac{4}{(\pi n)^3}\cos \pi n x \Big|_0^1 = \frac{4}{(\pi n)^3}\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{8}{(\pi n)^3}, & n = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \end{cases}$$

Итак,

$$A_n = \alpha_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{8}{(\pi n)^3}, & n = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \end{cases}$$

$$B_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Подставляя найденные коэффициенты в функцию $u(x,t)$, получим решение исходной задачи

$$u(x,t) = -\frac{8}{(\pi)^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos\sqrt{((2k+1)^2\pi^2 + 4)}t \sin(2k+1)\pi x.$$

Пример 1.4.

Решить смешанную задачу для уравнения гиперболического типа

$$\begin{cases} u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + 2u_x, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\pi} = 0, \\ u\big|_{x=0} = e^{-x}\sin 3x, \quad u_t\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Уравнение содержит младшие производные, однако оно однородно. Граничные условия также однородны, поэтому задача является однородной. Согласно методу Фурье решение будем искать в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Подставив эту функцию в исходное уравнение, получим

$$T''(t)X(x) - 3T'(t)X(x) = X''(x)T(t) + 2X'(x)T(t).$$

Поделив последнее равенство на $X(x)T(t) \neq 0$, имеем

$$\frac{T''(t) - 3T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x) + 2X'(x)}{X(x)}.$$

Получилось равенство, в котором левая часть есть функция, зависящая от переменной t, а правая часть — от переменной x. Равенство возможно, если его правая и левая части равны одной и той же константе $-\lambda$:

$$\frac{T''(t) - 3T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x) + 2X'(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Эти равенства представляют собой отдельные уравнения для $X(x)$ и для $T(t)$:

$$\frac{T'' - 3T'}{T} = -\lambda,$$

$$\frac{X'' + 2X'}{X} = -\lambda.$$

Или

$$X'' + 2X' + \lambda X = 0,$$

$$T'' - 3T' + \lambda T = 0.$$

Из граничных условий задачи имеем

$$u\big|_{x=0} = X(0)T(t) = 0,$$

$$u\big|_{x=\pi} = X(\pi)T(t) = 0.$$

Откуда (так как $T(t) \neq 0$)

$$X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0.$$

Итак, для определения функции $X(x)$ получили задачу Штурма — Лиувилля:

$$\begin{cases} X'' + 2X' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0. \end{cases}$$

Эта задача более сложная, чем в предыдущем примере. Уравнение содержит младшую производную, и для определения собственных значений и собственных функций мы не можем воспользоваться таблицей. Найдем сначала общее решение уравнения. Для этого составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 2k + \lambda = 0.$$

Откуда

$$k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - \lambda}.$$

Из теории знаем, что ненулевые решения рассматриваемой задачи можно получить только при комплексных корнях характеристического уравнения. Поэтому $1-\lambda<0$. Тогда

$$k_{1,2}=-1\pm i\sqrt{\lambda-1}.$$

Тогда общее решение уравнения имеет вид

$$X(x)=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{\lambda-1}x+C_2\sin\sqrt{\lambda-1}x).$$

Подставив это общее решение в первое из граничных условий, получим

$$X(0)=C_1=0.$$

Учитывая последнее равенство, подставим общее решение во второе из граничных условий:

$$X(\pi)=e^{-\pi}C_2\sin\sqrt{\lambda-1}\pi=0.$$

Поскольку все сомножители, кроме последнего, отличны от нуля, имеем

$$\sin\sqrt{\lambda-1}\pi=0,$$

$$\sqrt{\lambda-1}\pi=\pi n,\quad n=1,2,\ldots\,.$$

Откуда собственные значения

$$\lambda_n=n^2+1, n=1,2,\ldots\,.$$

Без ограничения общности, полагая $C_2=1$, получим собственные функции задачи Штурма — Лиувилля:

$$X_n(x)=e^{-x}\sin nx,\quad n=1,2,\ldots\,.$$

При найденных λ_n решим уравнение для функции $T(t)$:

$$T_n'' - 3T_n + (n^2+1)T_n = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 3k + (n^2+1) = 0.$$

Откуда

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(n^2+1)}}{2}.$$

Очевидно, что при $n = 1$ выражение, стоящее под знаком радикала, больше нуля. В этом случае корни характеристического уравнения вещественны и различны:

$$k_1 = \frac{3+1}{2} = 2, \qquad k_2 = \frac{3-1}{2} = 1.$$

Для $n \geq 2$ выражение, стоящее под знаком радикала, меньше нуля, а корни характеристического уравнения являются комплексными:

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{4(n^2+1) - 9}}{2}.$$

Тогда общее решение имеет вид

при $n = 1$:

$$T_1(t) = A_1 e^t + B_2 e^{2t},$$

при $n \geq 2$:

$$T_n(t) = e^{3/2t}\left(A_n \cos\frac{\sqrt{4(n^2+1)-9}}{2}t + B_n \sin\frac{\sqrt{4(n^2+1)-9}}{2}t\right).$$

Рассмотрим ряд

$$u(x,t) = (A_1 e^t + B_1 e^{2t})e^{-x}\sin x +$$

$$+ e^{\frac{3}{2}t-x} \sum_{n=2}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\sqrt{4(n^2+1)-9}}{2} t + B_n \sin \frac{\sqrt{4(n^2+1)-9}}{2} t \right) \sin nx.$$

Предполагая, что этот ряд и ряды, полученные из него двухкратным дифференцированием по x и по t, равномерно сходятся, подберем A_n и B_n так, чтобы выполнялись начальные условия задачи. Из первого начального условия имеем

$$u|_{t=0} = (A_1 + B_1)e^{-x} \sin x + e^{-x} \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin nx = e^{-x} \sin x.$$

В данном примере нет необходимости раскладывать начальную функцию в ряд Фурье, так как она является одной из собственных функций задачи Штурма — Лиувилля. Приравнивая коэффициенты при одинаковых $X_n = e^{-x} \sin nx$, получим

при $n = 1$:

$$A_1 + B_1 = 1,$$

при $n \geq 2$:

$$A_n = 0.$$

Из второго начального условия, учитывая уже найденные коэффициенты A_n, имеем

$$u_t|_{t=0} = (A_1 + 2B_1)e^{-x} \sin x + e^{-x} \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{\sqrt{4(n^2+1)-9}}{2} \sin nx = 0.$$

Откуда

$$A_1 + 2B_1 = 0,$$

$$B_n = 0, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Таким образом, все коэффициенты, кроме A_1 и B_1, равны нулю. Для определения A_1 и B_1 имеем систему уравнений

$$A_1 + B_1 = 1,$$

$$A_1 + 2B_1 = 0.$$

Откуда

$$A_1 = 2, \quad B_1 = -1.$$

Подставляя найденные коэффициенты в функцию $u(x,t)$, получим решение исходной задачи

$$u(x,t) = (2e^t - e^{2t})e^{-x}\sin x.$$

Ответ. $u(x,t) = (2e^t - e^{2t})e^{-x}\sin x$.

1.3. Неоднородная смешанная задача для волнового уравнения с неоднородностью в уравнении

Рассмотрим колебания однородной струны длины l, закрепленной на концах, под действием внешней силы $f(x,t)$, рассчитанной на единицу длины. Эта задача приводит к решению неоднородного уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{1.35}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \tag{1.36}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \tag{1.37}$$

Решение такой задачи будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \tag{1.38}$$

где $X_n(x)$ — собственные функции вспомогательной однородной задачи, а $T_n(t)$ — неопределенные пока функции, которые определим так, чтобы формула (1.38) давала решение задачи (1.35)–(1.36)–(1.37). Рассмотрим вспомогательную однородную задачу:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

$$u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=l} = 0.$$

Найдем собственные функции соответствующей задачи Штурма — Лиувилля:

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, \ldots\, . \tag{1.39}$$

Тогда с учетом (1.38) и (1.39) решение исходной задачи будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{1.40}$$

Далее основная идея метода состоит в разложении внешней силы $f(x,t)$ и начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды по тем же собственным функциям $X_n(x)$ вспомогательной однородной задачи. В нашем случае имеем

$$f(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{1.41}$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{1.42}$$

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{1.43}$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$
$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$
$$\psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Подставив функции $u(x,t)$ в виде (1.40) и $f(x,t)$ в виде (1.41) в уравнение (1.35), получим

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(T_n'' + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n\right)\sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{i=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Сравнивая коэффициенты функциональных рядов, стоящих слева и справа в последнем равенстве (коэффициенты при одинаковых $\sin\frac{n\pi x}{l}$), получим обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $T_n(t)$

$$T_n'' + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n = f_n(t), n = 1, 2, \ldots\ . \tag{1.44}$$

Решив обыкновенные дифференциальные уравнения (1.44), найдем $T_n(t)$

$$T_n(t) = T_n^{oo}(t) + T_n^{*}(t), n = 1, 2, \ldots\ ,$$

где $T_n^{oo}(t)$ — общие решения соответствующих однородных уравнений, $T_n^{*}(t)$ — частные решения неоднородных уравнений.

В нашем случае

$$T_n^{oo} = A_n \cos\frac{an\pi t}{l} + B_n \sin\frac{an\pi t}{l}.$$

Тогда

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{an\pi t}{l} + B_n \sin\frac{an\pi t}{l} + T_n^*(t), n = 1, 2, \dots , \quad (1.45)$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные. Для определения A_n и B_n будем использовать начальные условия (1.37). Сначала перепишем решение (1.40) с учетом (1.45) в виде

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{an\pi t}{l} + B_n \sin\frac{an\pi t}{l} + T_n^*(t) \right) \sin\frac{n\pi x}{l}. \quad (1.46)$$

Подставим решение (1.46) в начальные условия (1.37). С учетом (1.42) и (1.43) получим

$$u|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} (A_n + T_n^*(0)) \sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$u_t|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{an\pi}{l} B_n + T_n^*(0) \right) \sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Откуда

$$A_n + T_n^*(0) = \varphi_n, n = 1, 2, \dots ,$$

$$\frac{an\pi}{l} B_n + T_n^*(0) = \psi_n, n = 1, 2, \dots .$$

Или

$$A_n = \varphi_n - T_n^*(0), n = 1, 2, \dots ,$$

$$B_n = \frac{l}{an\pi} \left(\psi_n - T_n^*(0) \right), n = 1, 2, \dots ,$$

т. е. коэффициенты A_n и B_n определены.

Подставив найденные выражения в ряд (1.46), получим решение исходной задачи, если ряд (1.46) при найденных A_n и

B_n равномерно сходится, а также равномерно сходятся ряды, полученные из него почленным дифференцированием по x и по t дважды.

Замечание. Задачу можно было решить несколько иначе. Подставить ряд (1.40) не только в уравнение (1.35), но и в начальные условия (1.37). Откуда с помощью (1.42) и (1.43) получить начальные условия для функций $T_n(t)$. Тогда для функций $T_n(t)$ получим задачи Коши, решив которые, сразу определим произвольные постоянные, входящие в формулу (1.45).

Пример 1.5 (пример выполнения задачи 15).

Найти решение уравнения

$$u_{tt} = \frac{1}{9} u_{xx} + 24 \cos 5t \sin 3x \tag{1.47}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0 \tag{1.48}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0. \tag{1.49}$$

Задача неоднородная с неоднородностью в уравнении, поэтому решение ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \tag{1.50}$$

где $X_n(x)$ — собственные функции вспомогательной однородной задачи.

1. Решаем вспомогательную однородную задачу для нахождения собственных значений и собственных функций:

$$u_{tt} = \frac{1}{9} u_{xx},$$

$$u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=\pi} = 0.$$

Воспользуемся данными, представленными в табл. 1. У нас $a = \frac{1}{3}, l = \pi$. Собственные функции соответствующей задачи Штурма — Лиувилля для этой задачи имеют вид

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{\pi} = \sin nx, n = 1, 2, \ldots .$$

2. Переходим к решению основной задачи (1.47)–(1.48)–(1.49). Ее решение будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx. \tag{1.51}$$

Подставим (1.51) в уравнение (1.47)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(T_n'' + \left(\frac{n}{3}\right)^2 T_n \right) \sin nx = 24 \cos 5t \sin 3x.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых $\sin nx$, получим при $n = 3$:

$$T_3'' + \left(\frac{3}{3}\right)^2 T_3 = 24 \cos 5t.$$

Или

$$T_3'' + T_3 = 24 \cos 5t.$$

При $n \in N, n \neq 3$:

$$T_n'' + \left(\frac{n}{3}\right)^2 T_n = 0.$$

Подставив ряд (1.51) в условия (1.49), получим

$$u\big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(0) \sin nx = 0,$$

$$u_t\big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} T'_n(0) \sin nx = 0.$$

Откуда

$$T_n(0) = 0,$$

$$T'_n(0) = 0, n = 1, 2, \dots \,.$$

Итак, получили две задачи Коши:

$$\begin{cases} T''_3 + T_3 = 24 \cos 5t, \\ T_3(0) = 0, \\ T'_3(0) = 0; \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} T''_n + \left(\frac{n}{3}\right)^2 T_n = 0, \\ T_n(0) = 0, \\ T'_n(0) = 0, n = 1, 2, 4, \dots \,. \end{cases}$$

Вторая задача имеет только тривиальное решение, так как $T_n \equiv 0$ — очевидное решение этой задачи, а задача Коши, как известно, имеет единственное решение.

Найдем $T_3(t)$:

$$T_3(t) = T_3^{oo}(t) + T_3^{*}(t),$$

где $T_3^{oo}(t)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, $T_3^{*}(t)$ — частное решение неоднородного уравнения.

Решим соответствующее однородное уравнение

$$T_3'' + T_3 = 0.$$

Это линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Оно имеет мнимые корни

$$\lambda_{1,2} = \pm i.$$

Поэтому

$$T_3^{oo}(t) = A_3 \cos t + B_3 \sin t,$$

где A_3 и B_3 — произвольные постоянные.

Частное решение $T_3^*(t)$ неоднородного уравнения будем искать методом неопределенных коэффициентов. Пусть

$$T_3^*(t) = a \cos 5t + b \sin 5t.$$

Для определения коэффициентов a и b подставим эту функцию в уравнение и сравним коэффиценты при $\cos 5t$ и $\sin 5t$ в правой и левой частях полученного равенства:

$$\begin{array}{r|l} 1 & T_3^* = a \cos 5t + b \sin 5t, \\ 0 & (T_3^*)' = -5a \sin 5t + 5b \cos 5t, \\ 1 & (T_3^*)'' = -25a \cos 5t - 25b \sin 5t. \end{array}$$

Здесь слева расставлены коэффициенты, на которые соответствующие производные умножаются в уравнении. Имеем

$$\cos 5t(a - 25a) + \sin 5t(b - 25b) = 24 \cos 5t.$$

Откуда

$$-24a = 24, a = -1,$$

$$-24b = 0, b = 0.$$

Таким образом, частное решение

$$T_3^* = -\cos 5t$$

и общее решение неоднородного уравнения

$$T_3(t) = A_3 \cos t + B_3 \sin t - \cos 5t.$$

Определим A_3 и B_3 так, чтобы выполнялись условия здачи Коши:

$$T_3(0) = A_3 - 1 = 0,$$

$$T_3'(0) = B_3 = 0.$$

Откуда

$$A_3 = 1, B_3 = 0.$$

Тогда

$$T_3(t) = \cos t - \cos 5t,$$

$$T_n = 0, n \in N, n \neq 3.$$

Подставляя найденные T_n в решение (1.51), получим решение исходной задачи

$$u(x,t) = (\cos t - \cos 5t) \sin 3x.$$

Далее делаем проверку полученного ответа.

Ответ. $u(x,t) = (\cos t - \cos 5t) \sin 3x.$

Пример 1.6 (пример выполнения задачи 15).

Найти решение уравнения

$$u_{tt} = \frac{1}{16}u_{xx} + 2e^{-t}\sin 4x \tag{1.52}$$

при граничных условиях

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\pi} = 0 \tag{1.53}$$

и начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0. \tag{1.54}$$

Задача неоднородная с неоднородностью в уравнении, поэтому решение ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x), \tag{1.55}$$

где $X_n(x)$ — собственные функции вспомогательной однородной задачи.

1. Решаем вспомогательную однородную задачу для нахождения собственных значений и собственных функций:

$$u_{tt} = \frac{1}{16}u_{xx},$$

$$u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=\pi} = 0.$$

Воспользуемся данными, представленными в табл. 1. У нас $a = \frac{1}{4}, l = \pi$. Собственные функции соответствующей задачи Штурма — Лиувилля для этой задачи имеют вид

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{\pi} = \sin nx, n = 1, 2, \dots .$$

2. Переходим к решению основной задачи (1.52)–(1.53)–(1.54). Ее решение будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx. \tag{1.56}$$

Подставим (1.56) в уравнение (1.52)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(T_n'' + \left(\frac{n}{4}\right)^2 T_n \right) \sin nx = 2e^{-t} \sin 4x.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых $\sin nx$, получим при $n = 4$:

$$T_4'' + \left(\frac{4}{4}\right)^2 T_4 = 2e^{-t}.$$

Или

$$T_4'' + T_4 = 2e^{-t}.$$

При $n \in N, n \neq 4$:

$$T_n'' + \left(\frac{n}{4}\right)^2 T_n = 0.$$

Подставив ряд (1.56) в условия (1.54), получим

$$u\big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(0) \sin nx = 0,$$

$$u_t\big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} T_n'(0) \sin nx = 0.$$

Откуда

$$T_n(0) = 0,$$

$$T_n'(0) = 0, n = 1, 2, \dots .$$

Итак, получили две задачи Коши:

$$\begin{cases} T_4'' + T_4 = 2e^{-t}, \\ T_4(0) = 0, \\ T_4'(0) = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} T_n'' + \left(\frac{n}{4}\right)^2 T_n = 0, \\ T_n(0) = 0, \\ T_n'(0) = 0, n = 1, 2, 3, 5, \dots . \end{cases}$$

Вторая задача имеет только тривиальное решение, так как $T_n \equiv 0$ — очевидное решение этой задачи, а задача Коши, как известно, имеет единственное решение.

Найдем $T_4(t)$:

$$T_4(t) = T_4^{oo}(t) + T_4^*(t),$$

где $T_4^{oo}(t)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, $T_4^*(t)$ — частное решение неоднородного уравнения.

Решим соответствующее однородное уравнение:

$$T_4'' + T_4 = 0.$$

Это линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Оно имеет мнимые корни

$$\lambda_{1,2} = \pm i.$$

Поэтому

$$T_4^{oo}(t) = A_4 \cos t + B_4 \sin t,$$

где A_4 и B_4 — произвольные постоянные.

Частное решение $T_4^*(t)$ неоднородного уравнения будем искать методом неопределенных коэффициентов. Пусть

$$T_4^*(t) = ae^{-t}.$$

Для определения коэффициента a подставим эту функцию в уравнение и сравним коэффициенты при e^{-t} в правой и левой частях полученного равенства:

$$\begin{array}{r|l} 1 & T_4^* = ae^{-t}, \\ 0 & (T_4^*)' = -ae^{-t}, \\ 1 & (T_4^*)'' = ae^{-t}. \end{array}$$

Здесь слева расставлены коэффициенты, на которые соответствующие производные умножаются в уравнениии. Имеем

$$e^{-t}(a + a) = 2e^{-t}.$$

Откуда

$$2a = 2, a = 1.$$

Таким образом, частное решение

$$T_4^* = e^{-t}$$

и общее решение неоднородного уравнения

$$T_4(t) = A_4 \cos t + B_4 \sin t + e^{-t}.$$

Определим A_4 и B_4 так, чтобы выполнялись условия задачи Коши:

$$T_4(0) = A_4 + 1 = 0,$$

$$T_4'(0) = B_4 - 1 = 0.$$

Откуда

$$A_4 = -1, B_4 = 1.$$

Тогда

$$T_4(t) = -\cos t + \sin t + e^{-t},$$

$$T_n = 0, n \in N, n \neq 4.$$

Подставляя найденные T_n в решение (1.56), получим решение исходной задачи

$$u(x,t) = (-\cos t + \sin t + e^{-t}) \sin 4x.$$

Далее делаем проверку полученного ответа.

Ответ. $u(x,t) = (-\cos t + \sin t + e^{-t}) \sin 4x.$

Пример 1.7.

Найти решение уравнения

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 3t \tag{1.57}$$

при граничных условиях

$$u_x|_{x=0} = 0, \, u_x|_{x=2} = 0 \tag{1.58}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = \cos \pi x, \, u_t|_{t=0} = 0. \tag{1.59}$$

Задача неоднородная с неоднородностью в уравнении, поэтому решение ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \tag{1.60}$$

где $X_n(x)$ — собственные функции вспомогательной однородной задачи.

1. Решаем вспомогательную однородную задачу для нахождения собственных значений и собственных функций:

$$u_{tt} = 4u_{xx},$$

$$u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=2} = 0.$$

Воспользуемся данными, представленными в табл. 1.
У нас $a = 2, l = 2$. Собственные функции соответствующей задачи Штурма — Лиувилля для этой задачи имеют вид

$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{2}, n = 0, 1, 2, \dots\ .$$

В данном случае $\lambda = 0$ является собственным значением задачи Штурма — Лиувилля, $X_0 = 1$.

2. Переходим к решению основной задачи (1.57)–(1.58)–(1.59). Ее решение будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(t) \cos\frac{n\pi x}{2}. \tag{1.61}$$

Подставим (1.61) в уравнение (1.57)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(T_n'' + 4\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 T_n \right) \cos\frac{n\pi x}{2} = 3t.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых $\cos\frac{n\pi x}{2}$, получим при $n = 0$:

$$T_0'' = 3t;$$

при $n \in N, n \neq 0$:

$$T_n'' + (n\pi)^2 T_n = 0.$$

Подставив ряд (1.61) в условия (1.59), получим

$$u|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(0) \cos\frac{n\pi x}{2} = \cos \pi x,$$

$$u_t|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} T_n'(0) \cos\frac{n\pi x}{2} = 0.$$

Откуда, сравнивая коэффициенты при одинаковых $\cos\frac{n\pi x}{2}$,

$$T_2(0) = 1,$$

$$T_n(0) = 0, n = 0, 1, 3, \dots\ ,$$

$$T_n'(0) = 0, n = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Итак, получили три задачи Коши:

$$\begin{cases} T_0'' = 3t, \\ T_0(0) = 0, \\ T_0'(0) = 0. \end{cases} \tag{1.62}$$

$$\begin{cases} T_2'' + 4\pi^2 T_2 = 0, \\ T_2(0) = 1, \\ T_2'(0) = 0. \end{cases} \tag{1.63}$$

$$\begin{cases} T_n'' + (n\pi)^2 T_n = 0, \\ T_n(0) = 0, \\ T_n'(0) = 0, n = 1, 3, 4, \dots . \end{cases} \tag{1.64}$$

Задача (1.64) имеет только тривиальное решение, так как $T_n \equiv 0$ — очевидное решение этой задачи, а задача Коши, как известно, имеет единственное решение.

Решим задачу (1.62) и найдем $T_0(t)$. Общее решение уравнения

$$T_0(t) = \frac{t^3}{2} + A_0 t + B_0.$$

Из начальных условий имеем

$$T_0(0) = B_0 = 0,$$

$$T_0'(0) = \left(\frac{3t^2}{2} + A_0 \right) \Bigg|_{t=0} = A_0 = 0.$$

Итак,

$$T_0(t) = \frac{t^3}{2}.$$

Решим задачу (1.64) и найдем $T_2(t)$. Найдем общее решение линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \pi^2 = 0.$$

Оно имеет мнимые корни

$$\lambda_{1,2} = \pm \pi i.$$

Поэтому

$$T_2(t) = A_2 \cos \pi t + B_2 \sin \pi t,$$

где A_2 и B_2 — произвольные постоянные. Определим A_2 и B_2 так, чтобы выполнялись условия здачи Коши (1.63):

$$T_2(0) = A_2 = 1,$$

$$T_2'(0) = \pi B_2 = 0.$$

Откуда

$$A_2 = 1, B_2 = 0.$$

Тогда

$$T_2(t) = \cos \pi t.$$

Подставляя найденные T_n в решение (1.61), учитывая, что все $T_n = 0$, кроме T_0 и T_2, получим решение исходной задачи

$$u(x,t) = T_0 X_0 + T_2 X_2 = \frac{t^3}{2} + \cos \pi t \cos \pi x.$$

Далее делаем проверку полученного ответа.

Ответ. $u(x,t) = \frac{t^3}{2} + \cos \pi t \cos \pi x.$

1.4. Неоднородная смешанная задача для волнового уравнения с неоднородностью в граничных условиях

Рассмотрим свободные колебания однородной струны длины l, концы которой движутся по определенным законам. Эта задача приводит к решению уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \tag{1.65}$$

при граничных условиях

$$u\big|_{x=0} = \mu_1(t), u\big|_{x=l} = \mu_2(t) \tag{1.66}$$

и начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), u_t\big|_{t=0} = \psi(x). \tag{1.67}$$

Решить такую задачу сразу методом Фурье мы не можем, так как не сможем выписать условия для задачи Штурма — Лиувилля. Поэтому сначала подберем функцию $v(x,t)$, удовлетворяющую граничным условиям (1.66). Если оба условия (1.66) являются условиями первого рода, то эту функцию можно взять в виде

$$v(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)).$$

Если хотя бы одно из условий (1.66) является условием второго или третьего рода, то функцию v можно подобрать одним из следующих способов:

1) $v(x,t) = (\alpha_1 x + \beta_1)\mu_1(t) + (\alpha_2 x + \beta_2)\mu_2(t)$, где α_i, β_i — константы, которые определяются так, чтобы функция $v(x,t)$ удовлетворяла условиям (1.66);

2) $v(x,t) = (\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)\mu_1(t) + (\alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2)\mu_2(t)$, где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — константы, которые определяются так, чтобы функция $v(x,t)$ удовлетворяла условиям (1.66)

3) $v(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)$, где $A(t), B(t), C(t)$ — функции, зависящие от t, которые определяются так, чтобы функция $v(x,t)$ удовлетворяла условиям (1.66).

Понятно, что функцию v можно найти не единственным образом.

Далее решение задачи будем искать в виде суммы двух функций

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \tag{1.68}$$

где v — функция, удовлетворяющая граничным условиям (1.66), w — новая неизвестная функция.

Подставляя (1.68) в исходную задачу (1.65)–(1.66)–(1.67), получим задачу для функции w, которая «лучше» исходной тем, что граничные условия в ней получатся однородными:

$$w_{tt} = a^2 w_{xx} - v_{tt} - a^2 v_{xx}, \tag{1.69}$$

граничные условия

$$w|_{x=0} = 0, w|_{x=l} = 0 \tag{1.70}$$

и начальные условия

$$w|_{t=0} = \varphi(x) - v|_{t=0}\,, w_t|_{t=0} = \psi(x) - v_t|_{t=0}\,. \tag{1.71}$$

Полученная задача может быть однородной или неоднородной с неоднородностью в уравнении. Решение таких типов задач было рассмотрено в предыдущих параграфах.

Решив задачу (1.69)–(1.70)–(1.71), найдем функцию $w(x,t)$ и запишем решение исходной задачи по формуле (1.68).

1.5. Неоднородная смешанная задача для волнового уравнения с неоднородностью в уравнении и в граничных условиях

Задача о колебаниях однородной струны длины l под действием внешней возмущающей силы при условии, что концы струны движутся по определенным законам, приводит к решению неоднородного уравнения с неоднородными граничными условиями:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \tag{1.72}$$

граничные условия

$$u\big|_{x=0} = \mu_1(t), u\big|_{x=l} = \mu_2(t) \tag{1.73}$$

и начальные условия

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), u_t\big|_{t=0} = \psi(x). \tag{1.74}$$

Чтобы решить такую задачу, необходимо:

1. Снять неоднородность граничных условий (1.73), т. е. подобрать функцию $v(x,t)$, удовлетворяющую этим условиям;

2. Решение исходной задачи искать в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \tag{1.75}$$

где $v(x,t)$ — функция, удовлетворяющая граничным условиям (1.73), $w(x,t)$ — новая неизвестная функция;

3. Подставить (1.75) в исходную задачу (1.72)–(1.73)–(1.74) и получить задачу для функции $w(x,t)$, решив которую, сможем записать окончательное решение.

Пример 1.8 (пример выполнения задачи 14).

Найти решение уравнения

$$u_{tt} = 4u_{xx} \tag{1.76}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 1, u|_{x=4} = 9 \tag{1.77}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = 1 + 2x + 24\sin \pi x, u_t|_{t=0} = 0. \tag{1.78}$$

Задача неоднородная с неоднородностью в граничных условиях. Поэтому

1. Подберем функцию $v(x,t)$, удовлетворяющую граничным условиям (1.77). Так как оба из условий (1.77) являются условиями первого рода, то эту функцию можно взять в виде

$$v(x,t) = 1 + \frac{x}{4}(9-1) = 1 + 2x.$$

2. Решение исходной задачи искать в виде

$$u(x,t) = 1 + 2x + w(x,t), \tag{1.79}$$

где $w(x,t)$ — новая неизвестная функция.

3. Подставим (1.79) в исходную задачу (1.76)–(1.77)–(1.78) и получим задачу для функции $w(x,t)$.

Из уравнения (1.76) имеем

$$w_{tt} = 4w_{xx},$$

Из граничных условий (1.77)

$$u|_{x=0} = (1 + 2x + w)|_{x=0} = 1 + w|_{x=0} = 1,$$

$$u\big|_{x=4} = (1 + 2x + w)\big|_{x=4} = 9 + w\big|_{x=4} = 9$$

имеем

$$w\big|_{x=0} = 0, \; w\big|_{x=4} = 0.$$

Из начальных условий (1.78) получим начальные условия для функции w:

$$u\big|_{t=0} = 1 + 2x + w\big|_{t=0} = 1 + 2x + 24 \sin \pi x,$$

$$u_t\big|_{t=0} = (1 + 2x + w)_t\big|_{t=0} = w_t\big|_{t=0} = 0.$$

Откуда

$$w\big|_{t=0} = 24 \sin \pi x, \quad w_t\big|_{t=0} = 0.$$

Итак, для функции $w(x, t)$ получили следующую задачу

$$w_{tt} = 4w_{xx}, \tag{1.80}$$

$$w\big|_{x=0} = 0, \quad w\big|_{x=4} = 0, \tag{1.81}$$

$$w\big|_{t=0} = 24 \sin \pi x, \quad w_t\big|_{t=0} = 0. \tag{1.82}$$

Эта задача однородна, поэтому решаем ее методом Фурье.

1. Решение будем искать в виде

$$w(x, t) = X(x)T(t). \tag{1.83}$$

Подставляя (1.83) в (1.80), получаем

$$X(x)T''(t) = 4X''(x)T(t).$$

Разделив обе части последнего равенства на $4X(x)T(t) \neq 0$, имеем

$$\frac{T''}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda. \tag{1.84}$$

2. Используя условия (1.81), приходим к задаче Штурма — Лиувилля (можно использовать данные табл. 1. У нас $a = 2, l = 4$):

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, X(4) = 0; \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{4}\right)^2, n = 1, 2, \dots ,$$

$$X_n = \sin\frac{\pi n x}{4}, n = 1, 2, \dots .$$

3. Из равенства (1.84) получим уравнение

$$T_n'' + \left(\frac{2\pi n}{4}\right)^2 T_n = 0.$$

Его решение

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi n t}{2} + B_n \sin\frac{\pi n t}{2},$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

4. Таким образом, решение уравнения (1.80), удовлетворяющее граничным условиям (1.81), примет вид

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\pi n t}{2} + B_n \sin\frac{\pi n t}{2}\right) \sin\frac{n\pi x}{4}. \tag{1.85}$$

Определим коэффициенты A_n и B_n, используя условия (1.82):

$$w|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{4} = 24\sin\pi x,$$

$$w_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{2} B_n \sin \frac{n\pi x}{4} = 0.$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых $\sin \frac{n\pi x}{4}$. Из второго равенства следует, что все $B_n = 0, n = 1, 2, \ldots$. Сравнивая коэффициенты первого равенства, имеем

при $n = 4$: $\quad A_4 = 24$,

при $n \neq 4$: $\quad A_n = 0, n = 1, 2, 3, 5, \ldots$.

Подставим найденные коэффициенты в решение (1.85), получим

$$w(x,t) = 24 \cos 2\pi t \sin \pi x.$$

Запишем решение исходной задачи, используя формулу (1.79):

$$u(x,t) = 1 + 2x + 24 \cos 2\pi t \sin \pi x.$$

Очевидно, найденная функция удовлетворяет условиям (1.81), (1.82) задачи. Нетрудно проверить, что она удовлетворяет также и уравнению (1.80).

Ответ. $u(x,t) = 1 + 2x + 24 \cos 2\pi t \sin \pi x$.

1.6. Индивидуальные задания к главе 1

Задача 11

Найти решение смешанной задачи:

11.1.
$$u_{tt} = 81 u_{xx},$$
$$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=5} = 0,$$
$$u|_{t=0} = \sin \pi x,\ u_t|_{t=0} = 18\pi \sin 2\pi x.$$

11.2. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 64u_{xx},\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=6} = 0,\\ &u|_{t=0} = 2\sin\pi x,\, u_t|_{t=0} = 8\pi\sin\pi x. \end{aligned}$$

11.3. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 49u_{xx},\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=4} = 0,\\ &u|_{t=0} = 3\sin 2\pi x,\, u_t|_{t=0} = 21\pi\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

11.4. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 36u_{xx},\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=5} = 0,\\ &u|_{t=0} = 4\sin 2\pi x,\, u_t|_{t=0} = 12\pi\sin 2\pi x. \end{aligned}$$

11.5. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 25u_{xx},\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=3} = 0,\\ &u|_{t=0} = 5\sin 3\pi x,\, u_t|_{t=0} = 20\pi\sin 4\pi x. \end{aligned}$$

11.6. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 16u_{xx},\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=4} = 0,\\ &u|_{t=0} = 6\sin 3\pi x,\, u_t|_{t=0} = 12\pi\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

11.7. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx},\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=2} = 0,\\ &u|_{t=0} = 7\sin 4\pi x,\, u_t|_{t=0} = 15\pi\sin 5\pi x. \end{aligned}$$

11.8. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx},\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=3} = 0,\\ &u|_{t=0} = 8\sin 4\pi x,\, u_t|_{t=0} = 8\pi\sin 4\pi x. \end{aligned}$$

11.9. $$\begin{aligned}&u_{tt}=u_{xx},\\&u|_{x=0}=0,\, u|_{x=1}=0,\\&u|_{t=0}=9\sin 5\pi x,\, u_t|_{t=0}=6\pi\sin 6\pi x.\end{aligned}$$

11.10. $$\begin{aligned}&u_{tt}=u_{xx},\\&u|_{x=0}=0,\, u|_{x=3}=0,\\&u|_{t=0}=10\sin 5\pi x,\, u_t|_{t=0}=5\pi\sin 5\pi x.\end{aligned}$$

11.11. $$\begin{aligned}&u_{tt}=4u_{xx},\\&u|_{x=0}=0,\, u|_{x=2}=0,\\&u|_{t=0}=6\sin 6\pi x,\, u_t|_{t=0}=6\pi\sin 3\pi x.\end{aligned}$$

11.12. $$\begin{aligned}&u_{tt}=25u_{xx},\\&u|_{x=0}=0,\, u|_{x=4}=0,\\&u|_{t=0}=3\sin 7\pi x,\, u_t|_{t=0}=\pi\sin \pi x.\end{aligned}$$

11.13. $$\begin{aligned}&u_{tt}=16u_{xx},\\&u|_{x=0}=0,\, u|_{x=3}=0,\\&u|_{t=0}=4\sin 3\pi x,\, u_t|_{t=0}=12\pi\sin 6\pi x.\end{aligned}$$

11.14. $$\begin{aligned}&u_{tt}=9u_{xx},\\&u|_{x=0}=0,\, u|_{x=2}=0,\\&u|_{t=0}=14\sin \pi x,\, u_t|_{t=0}=9\pi\sin 3\pi x.\end{aligned}$$

11.15. $$\begin{aligned}&u_{tt}=121u_{xx},\\&u|_{x=0}=0,\, u|_{x=1}=0,\\&u|_{t=0}=2\sin \pi x,\, u_t|_{t=0}=3\pi\sin 8\pi x.\end{aligned}$$

11.16. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx}, \\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=8} = 0, \\ &u\big|_{t=0} = \sin 3\pi x,\, u_t\big|_{t=0} = 12\pi \sin 6\pi x. \end{aligned}$$

11.17. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 36u_{xx}, \\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=6} = 0, \\ &u\big|_{t=0} = \sin 3\pi x,\, u_t\big|_{t=0} = 15\pi \sin 8\pi x. \end{aligned}$$

11.18. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 81u_{xx}, \\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=1} = 0, \\ &u\big|_{t=0} = 9\sin 3\pi x,\, u_t\big|_{t=0} = 9\pi \sin 9\pi x. \end{aligned}$$

11.19. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx}, \\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=6} = 0, \\ &u\big|_{t=0} = 9\sin 5\pi x,\, u_t\big|_{t=0} = 6\pi \sin 6\pi x. \end{aligned}$$

11.20. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 16u_{xx}, \\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=8} = 0, \\ &u\big|_{t=0} = \sin 3\pi x,\, u_t\big|_{t=0} = 14\pi \sin 2\pi x. \end{aligned}$$

11.21. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 25u_{xx}, \\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=4} = 0, \\ &u\big|_{t=0} = 10\sin 2\pi x,\, u_t\big|_{t=0} = 2\pi \sin 2\pi x. \end{aligned}$$

11.22. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 81u_{xx}, \\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=4} = 0, \\ &u\big|_{t=0} = 5\sin 3\pi x,\, u_t\big|_{t=0} = \pi \sin 2\pi x. \end{aligned}$$

11.23. $$u_{tt} = 4u_{xx},\quad u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1} = 0,\quad u|_{t=0} = 9\sin 7\pi x,\ u_t|_{t=0} = 18\pi \sin 4\pi x.$$

11.24. $$u_{tt} = 16u_{xx},\quad u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=8} = 0,\quad u|_{t=0} = \sin \pi x,\ u_t|_{t=0} = 12\pi \sin 2\pi x.$$

11.25. $$u_{tt} = 36u_{xx},\quad u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1} = 0,\quad u|_{t=0} = 9\sin 3\pi x,\ u_t|_{t=0} = 4\pi \sin \pi x.$$

Задача 12

Найти решение смешанной задачи:

12.1. $$u_{tt} = 9u_{xx},\quad u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=3} = 0,\quad u|_{t=0} = 3\cos 5\pi x,\ u_t|_{t=0} = 0.$$

12.2. $$u_{tt} = 16u_{xx},\quad u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=5} = 0,\quad u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 2\cos 5\pi x.$$

12.3. $$u_{tt} = 25u_{xx},\quad u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=5} = 0,\quad u|_{t=0} = 5\cos 3\pi x,\ u_t|_{t=0} = 0.$$

12.4. $$u_{tt} = 36u_{xx},\quad u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=6} = 0,\quad u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 8\cos 2\pi x.$$

12.5. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 81u_{xx},\\&u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=6} = 0,\\&u|_{t=0} = 34\cos 2\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0.\end{aligned}$$

12.6. $$\begin{aligned}&u_{tt} = u_{xx},\\&u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=4} = 0,\\&u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 2\cos 6\pi x.\end{aligned}$$

12.7. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 4u_{xx},\\&u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=35} = 0,\\&u|_{t=0} = 12\cos \pi x,\, u_t|_{t=0} = 0.\end{aligned}$$

12.8. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 9u_{xx},\\&u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=5} = 0,\\&u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 12\pi\cos 3\pi x.\end{aligned}$$

12.9. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 16u_{xx},\\&u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=3} = 0,\\&u|_{t=0} = 7\cos 9\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0.\end{aligned}$$

12.10. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 25u_{xx},\\&u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=1} = 0,\\&u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 11\pi\cos \pi x.\end{aligned}$$

12.11. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 36u_{xx},\\&u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=4} = 0,\\&u|_{t=0} = 32\cos 6\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0.\end{aligned}$$

12.12. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 81u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=2} = 0, \\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 8\cos 7\pi x. \end{aligned}$$

12.13. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 121u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=9} = 0, \\ &u|_{t=0} = 42\cos 2\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

12.14. $$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=12} = 0, \\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 13\pi\cos 13\pi x. \end{aligned}$$

12.15. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=2} = 0, \\ &u|_{t=0} = 21\cos 7\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

12.16. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=3} = 0, \\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 18\pi\cos 6\pi x. \end{aligned}$$

12.17. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 16u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=2} = 0, \\ &u|_{t=0} = 14\cos 7\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

12.18. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 25u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 24\cos 3\pi x. \end{aligned}$$

12.19. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 36u_{xx},\\&u_x\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=4} = 0,\\&u\big|_{t=0} = 32\cos 2\pi x,\ u_t\big|_{t=0} = 0.\end{aligned}$$

12.20. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 49u_{xx},\\&u_x\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=7} = 0,\\&u\big|_{t=0} = 0,\ u_t\big|_{t=0} = 24\cos 3\pi x.\end{aligned}$$

12.21. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 64u_{xx},\\&u_x\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=1} = 0,\\&u\big|_{t=0} = 25\cos 5\pi x,\ u_t\big|_{t=0} = 0.\end{aligned}$$

12.22. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 81u_{xx},\\&u_x\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=7} = 0,\\&u\big|_{t=0} = 0,\ u_t\big|_{t=0} = 25\pi x\cos 25\pi x.\end{aligned}$$

12.23. $$\begin{aligned}&u_{tt} = u_{xx},\\&u_x\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=2} = 0,\\&u\big|_{t=0} = 26\cos 7\pi x,\ u_t\big|_{t=0} = 0.\end{aligned}$$

12.24. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 4u_{xx},\\&u_x\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=6} = 0,\\&u\big|_{t=0} = 0,\ u_t\big|_{t=0} = 32\pi\cos 8\pi x.\end{aligned}$$

12.25. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 9u_{xx},\\&u_x\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=5} = 0,\\&u\big|_{t=0} = 15\cos 3\pi x,\ u_t\big|_{t=0} = 0.\end{aligned}$$

Задача 13

Найти решение смешанной задачи:

13.1. $$u_{tt} = 121u_{xx},\quad u_x|_{x=0} = 0,\ u|_{x=4{,}5} = 0,\quad u|_{t=0} = 5\cos 7\pi x,\ u_t|_{t=0} = 0.$$

13.2. $$u_{tt} = 100u_{xx},\quad u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=2{,}5} = 0,\quad u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 2\sin 5\pi x.$$

13.3. $$u_{tt} = 81u_{xx},\quad u_x|_{x=0} = 0,\ u|_{x=5{,}5} = 0,\quad u|_{t=0} = 3\cos \pi x,\ u_t|_{t=0} = 0.$$

13.4. $$u_{tt} = 81u_{xx},\quad u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=3{,}5} = 0,\quad u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 12\sin 3\pi x.$$

13.5. $$u_{tt} = 64u_{xx},\quad u_x|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1{,}5} = 0,\quad u|_{t=0} = 14\cos 3\pi x,\ u_t|_{t=0} = 0.$$

13.6. $$u_{tt} = 49u_{xx},\quad u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=5{,}5} = 0,\quad u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 34\sin 9\pi x.$$

13.7. $$u_{tt} = 36u_{xx},\quad u_x|_{x=0} = 0,\ u|_{x=9{,}5} = 0,\quad u|_{t=0} = 15\cos 17\pi x,\ u_t|_{t=0} = 0.$$

13.8. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 25u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=8{,}5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 32\sin 9\pi x. \end{aligned}$$

13.9. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 16u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u|_{x=7{,}5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 54\cos 9\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

13.10. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=7{,}5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 23\sin 15\pi x. \end{aligned}$$

13.11. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u|_{x=4{,}5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 54\cos 7\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

13.12. $$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=9{,}5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 87\sin 45\pi x. \end{aligned}$$

13.13. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 100u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=5{,}5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 3\sin 15\pi x. \end{aligned}$$

13.14. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 81u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u|_{x=2{,}5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 6\cos 21\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

13.15. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 36u_{xx},\\ &u|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=2,5} = 0,\\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 134\sin 5\pi x. \end{aligned}$$

13.16. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 25u_{xx},\\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u|_{x=6,5} = 0,\\ &u|_{t=0} = 3\cos 9\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

13.17. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 16u_{xx},\\ &u|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=6,5} = 0,\\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 65\sin 15\pi x. \end{aligned}$$

13.18. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx},\\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u|_{x=0,5} = 0,\\ &u|_{t=0} = 65\cos 17\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

13.19. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx},\\ &u|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=13,5} = 0,\\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 12\sin 15\pi x. \end{aligned}$$

13.20. $$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx},\\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u|_{x=9,5} = 0,\\ &u|_{t=0} = 36\cos 17\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

13.21. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 100u_{xx},\\ &u|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=0,5} = 0,\\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 7\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

13.22. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 121u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u|_{x=1{,}5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 6\cos 3\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

13.23. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 81u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=3{,}5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 8\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

13.24. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 64u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u|_{x=3{,}5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 7\cos \pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

13.25. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 49u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=7{,}5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 23\sin 15\pi x. \end{aligned}$$

Задача 14

Найти решение смешанной задачи:

14.1. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = -8,\, u|_{x=2} = 4, \\ &u|_{t=0} = -8 + 6x + 7\sin 4\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

14.2. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 3,\, u|_{x=3} = 12, \\ &u|_{t=0} = 3 + 3x,\, u_t|_{t=0} = 7\pi\sin 15\pi x. \end{aligned}$$

14.3. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = -2,\, u|_{x=1} = 4, \\ &u|_{t=0} = -2 + 6x + 12\sin \pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

14.4. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 5,\, u|_{x=5} = 15, \\ &u|_{t=0} = 5 + 2x,\, u_t|_{t=0} = 8\pi \sin 5\pi x. \end{aligned}$$

14.5. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = -3,\, u|_{x=3} = 9, \\ &u|_{t=0} = -3 + 4x + 4\sin 12\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

14.6. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 8,\, u|_{x=3} = 2, \\ &u|_{t=0} = 8 - 2x,\, u_t|_{t=0} = \pi \sin 12\pi x. \end{aligned}$$

14.7. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 4,\, u|_{x=5} = 14, \\ &u|_{t=0} = 4 + 2x + 3\sin 12\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

14.8. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = -9,\, u|_{x=4} = 11, \\ &u|_{t=0} = -9 + 5x,\, u_t|_{t=0} = 5\pi \sin 3\pi x. \end{aligned}$$

14.9. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 16u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 4,\, u|_{x=6} = 16, \\ &u|_{t=0} = 4 + 2x + \sin 3\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

14.10. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 16u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 1,\, u|_{x=1} = 7, \\ &u|_{t=0} = 1 + 6x,\, u_t|_{t=0} = 23\pi \sin 5\pi x. \end{aligned}$$

14.11. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 16u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = -9,\, u|_{x=2} = 4, \\ &u|_{t=0} = -8 + 6x + 7\sin 4\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

14.12. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 16u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 3,\, u|_{x=3} = 12, \\ &u|_{t=0} = 3 + 3x,\, u_t|_{t=0} = 7\pi\sin 15\pi x. \end{aligned}$$

14.13. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 16u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = -4,\, u|_{x=3} = 11, \\ &u|_{t=0} = -4 + 3x + \sin 8\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

14.14. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 25u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = -7,\, u|_{x=2} = 1, \\ &u|_{t=0} = -7 + 4x,\, u_t|_{t=0} = 11\pi\sin 12\pi x. \end{aligned}$$

14.15. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 25u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 1,\, u|_{x=4} = 9, \\ &u|_{t=0} = 1 + 2x + 11\sin 8\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

14.16. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 25u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = -3,\, u|_{x=3} = 12, \\ &u|_{t=0} = -3 + 5x,\, u_t|_{t=0} = 5\pi\sin 13\pi x. \end{aligned}$$

14.17. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 25u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = -2,\, u|_{x=9} = 16, \\ &u|_{t=0} = -2 + 2x + 2\sin 13\pi x,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

14.18. $$u_{tt} = 36u_{xx},\quad u|_{x=0} = -5,\ u|_{x=4} = 7,\quad u|_{t=0} = -5 + 3x,\ u_t|_{t=0} = 5\pi \sin 9\pi x.$$

14.19. $$u_{tt} = 36u_{xx},\quad u|_{x=0} = 6,\ u|_{x=7} = 8,\quad u|_{t=0} = 6 + 2x + 2\sin 9\pi x,\ u_t|_{t=0} = 0.$$

14.20. $$u_{tt} = 36u_{xx},\quad u|_{x=0} = -12,\ u|_{x=2} = 2,\quad u|_{t=0} = -12 + 7x,\ u_t|_{t=0} = 17\pi \sin 3\pi x.$$

14.21. $$u_{tt} = 36u_{xx},\quad u|_{x=0} = -1,\ u|_{x=2} = -5,\quad u|_{t=0} = -1 - 2x + 5\sin 3\pi x,\ u_t|_{t=0} = 0.$$

14.22. $$u_{tt} = 36u_{xx},\quad u|_{x=0} = 2,\ u|_{x=7} = -12,\quad u|_{t=0} = 2 - 2x,\ u_t|_{t=0} = 9\pi \sin 5\pi x.$$

14.23. $$u_{tt} = 49u_{xx},\quad u|_{x=0} = -8,\ u|_{x=2} = 4,\quad u|_{t=0} = -8 + 6x + 3\sin 8\pi x,\ u_t|_{t=0} = 0.$$

14.24. $$u_{tt} = 49u_{xx},\quad u|_{x=0} = -4,\ u|_{x=3} = 2,\quad u|_{t=0} = -4 + 2x,\ u_t|_{t=0} = 9\pi \sin 2\pi x.$$

$u_{tt} = 49u_{xx},$

14.25. $u|_{x=0} = -10,\ u|_{x=4} = 6,$

$u|_{t=0} = -10 + 4x + 5\sin 3\pi x,\ u_t|_{t=0} = 0.$

Задача 15

Найти решение смешанной задачи:

$u_{tt} = 4u_{xx} + e^{-2t}\sin 7x,$

15.1. $u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0,$

$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0.$

$u_{tt} = 9u_{xx} + \sin t \sin 6x,$

15.2. $u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0,$

$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0.$

$u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx} + 2t\sin 9x,$

15.3. $u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0,$

$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0.$

$u_{tt} = \frac{1}{9}u_{xx} + \cos 2t \sin x,$

15.4. $u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0,$

$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0.$

$u_{tt} = 16u_{xx} + e^{t}\sin 2x,$

15.5. $u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0,$

$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0.$

$u_{tt} = 16u_{xx} + 3\sin 2t \sin 6x,$

15.6. $u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0,$

$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0.$

15.7. $$\begin{aligned} &u_{tt} = \tfrac{1}{16}u_{xx} + 5t\sin x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

15.8. $$\begin{aligned} &u_{tt} = \tfrac{1}{16}u_{xx} + (2\cos t + \sin t)\sin 2x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

15.9. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 25u_{xx} + e^{-4t}\sin 8x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

15.10. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 25u_{xx} + 3\sin 4t\sin 4x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

15.11. $$\begin{aligned} &u_{tt} = \tfrac{1}{25}u_{xx} + (2t+1))\sin 7x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

15.12. $$\begin{aligned} &u_{tt} = \tfrac{1}{25}u_{xx} + 6\cos 3t\sin 2x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

15.13. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 36u_{xx} + e^{4t}\sin 2x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

15.14. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 36u_{xx} + (\sin t + \cos t)\sin 3x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

15.15. $$\begin{aligned} &u_{tt} = \tfrac{1}{36}u_{xx} + (t-1)\sin 5x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

15.16. $$\begin{aligned} &u_{tt} = \tfrac{1}{36}u_{xx} + 4\cos t\sin 2x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

15.17. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 49u_{xx} + 3\sin 2t\sin x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

15.18. $$\begin{aligned} &u_{tt} = \tfrac{1}{49}u_{xx} + (t+1)\sin 2x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

15.19. $$\begin{aligned} &u_{tt} = \tfrac{1}{49}u_{xx} + 5\cos t\sin 2x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

15.20. $$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx} + e^{4t}\sin 8x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = 0,\, u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

15.21. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx} + 2\sin 3t \sin 2x,\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 0,\, u_t\big|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

15.22. $$\begin{aligned} &u_{tt} = \tfrac{1}{4}u_{xx} + 5t \sin 7x,\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 0,\, u_t\big|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

15.23. $$\begin{aligned} &u_{tt} = \tfrac{1}{81}u_{xx} + \cos t \sin 2x,\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 0,\, u_t\big|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

15.24. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx} + e^{-t} \sin 3x,\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 0,\, u_t\big|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

15.25. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 16u_{xx} + (\sin t + 2\cos t) \sin 6x,\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 0,\, u_t\big|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Глава 2

Смешанная задача для уравнений параболического типа

2.1. Однородная смешанная задача для уравнения теплопроводности

Уравнения параболического типа получаются при исследовании таких физических явлений, как теплопроводность, диффузия, распространение электромагнитных полей в проводящих средах и др.

Поставить задачу, соответствующую данной физической задаче, — это значит выбрать функцию, характеризующую физический процесс, а затем

1) вывести дифференциальное уравнение для этой функции;

2) установить для нее граничные условия;

3) сформулировать начальные условия.

Как и в случае уравнения гиперболического типа, здесь существуют граничные условия трех типов. Например, для граничной задачи об определении температуры стержня $0 \le x \le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура является произвольной функцией от x, граничные усовия будут характеризоваться следующим:

1) концы стержня поддерживаются при заданной температуре;

2) на концы стержня подается извне заданный тепловой поток;

3) на концах стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой задана.

Рассмотрим задачу о распространении тепла в идеально изолированном тонком однородном стержне длины l, если его концы поддерживаются при нулевой температуре.

Итак, будем искать решение задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \; t > 0, \tag{2.1}$$

$$u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=l} = 0, \tag{2.2}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x). \tag{2.3}$$

1. Найдем вспомогательные решения уравнения (2.1), не равные тождественно нулю, удовлетворяющие однородным граничным условиям (2.2) и представимые в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.1), получаем

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t). \tag{2.5}$$

Разделив обе части равенства (2.5) на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$, имеем

$$\frac{XT'}{a^2XT} = \frac{a^2X''T}{a^2XT} = -\lambda, \tag{2.6}$$

где λ — некоторая постоянная. Следовательно, из соотношения (2.6) и граничных условий (2.2) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $T(t)$ и задачу Штурма — Лиувилля для функции $X(x)$:

$$T' + a^2\lambda T = 0, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} &X'' + \lambda X = 0, \\ &X(0) = 0, X(l) = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

2. Рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля: необходимо найти такие значения параметра λ, называемые собственными, при которых задача (2.8) имеет ненулевые решения, а также найти эти ненулевые решения, называемые собственными функциями.

Общее решение уравнения имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \ \lambda > 0,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Из граничных условий задачи следует, что

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n = 1, 2, \ldots ,$$

$$X_n(x) = C_2 \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Без ограничения общности положим $C_2 = 1$, тогда собственные функции примут вид

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, \ldots .$$

Как и в задачах для волнового уравнения, в зависимости от вида граничных условий исходной задачи могут быть получены различные виды задачи Штурма — Лиувилля. Получающиеся при этом собственные значения и собственные функции представлены в таблице 1.

3. Найдем теперь решение уравнения (2.8), которое при $\lambda = \lambda_n$ имеет вид

$$T_n' + a^2 \lambda_n T_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Это линейное уравнение первого порядка, его решение

$$T_n(t) = A_n e^{-a^2 \lambda_n t}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Или

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

где A_n — произвольные постоянные.

Таким образом, при любых A_n все функции

$$u_n(x,t) = A_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

удовлетворяют уравнению (2.1) и условиям (2.2).

4. Рассмотрим бесконечный ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{2.9}$$

Если этот ряд сходится и сходятся ряды, полученные из него дифференцированием два раза по x и один раз по t, то ряд (2.9) представляет решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям (2.2).

5. Найдем A_n так, чтобы функция (2.9) удовлетворяла начальному условию (2.3). Имеем

$$u\big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x). \tag{2.10}$$

Функцию $\varphi(x)$ разложим в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля, в рассматриваемом случае по $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, \ldots$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{2.11}$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Подставляя (2.11) в (2.10), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Сравнение этих рядов показывает, что для выполнения начального условия надо положить $A_n = \varphi_n$. Следовательно,

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1, 2, \ldots\ . \tag{2.12}$$

Учитывая равенства (2.12), из формул (2.9) получим решение рассматриваемой смешанной задачи

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l},$$

где φ_n определяются по фомулам (2.11)

Пример 2.1 (пример выполнения задачи 17).

Решить однородную смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = 5u_{xx}, \tag{2.13}$$

$$u|_{x=0} = 0, u|_{x=4} = 0, \tag{2.14}$$

$$u|_{t=0} = \sin \pi x + 3 \sin 7\pi x. \tag{2.15}$$

1. Эта задача однородна, поэтому решение будем искать в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Подставляя эту функцию в уравнение (2.13), получаем

$$X(x)T'(t) = 5X''(x)T(t).$$

Разделив обе части последнего равенства на $5X(x)T(t) \neq 0$, имеем

$$\frac{T'}{5T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Из этих соотношений и граничных условий (2.14) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $T(t)$

$$T' + 5\lambda T = 0 \tag{2.16}$$

и задачу Штурма — Лиувилля для функции $X(x)$

$$X'' + \lambda X = 0,$$
$$X(0) = 0, X(4) = 0.$$

2. Рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля (можно использовать данные табл. 1. В этом примере $a^2 = 5, \;\; l = 4$). Находим

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{4}\right)^2, \; n = 1, 2, \ldots \, ,$$

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{4}, \; n = 1, 2, \ldots \, .$$

3. Найдем теперь решение уравнения (2.16), которое при $\lambda = \lambda_n$ имеет вид

$$T_n' + 5\left(\frac{\pi n}{4}\right)^2 T_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \, .$$

Это линейное уравнение первого порядка, его решение

$$T_n(t) = A_n e^{-5\left(\frac{\pi n}{4}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, \ldots \, ,$$

где A_n — произвольные постоянные.

Таким образом, при любых A_n все функции

$$u_n(x,t) = A_n e^{-5\left(\frac{\pi n}{4}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{4}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

удовлетворяют уравнению (2.13) и условиям (2.14).

4. Решение задачи ищем в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-5\left(\frac{\pi n}{4}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{4}.$$

Эта функция является решением уравнения (2.13) и удовлетворяет граничным условиям (2.14) при любых A_n, при которых ряд сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

5. Найдем A_n так, чтобы функция $u(x,t)$ удовлетворяла на-

чальному условию (2.15). Имеем

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{4} = \sin\pi x + 3\sin 7\pi x.$$

Отсюда

$$A_4 = 1, \quad A_{28} = 3,$$

$$A_n = 0, \quad n \in \mathbf{N},\ n \neq 4,\ n \neq 28.$$

Подставляя эти коэффициенты в функцию $u(x,t)$, получим решение рассматриваемой задачи

$$u(x,t) = e^{-5\left(\frac{4\pi}{4}\right)^2 t}\sin\frac{4\pi x}{4} + 3e^{-5\left(\frac{28\pi}{4}\right)^2 t}\sin\frac{28\pi x}{4}.$$

Ответ. $u(x,t) = e^{-5\pi^2 t}\sin\pi x + 3e^{-245\pi^2 t}\sin 7\pi x.$

Пример 2.2 (пример выполнения задачи 18).

Решить однородную смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = 3u_{xx}, \tag{2.17}$$

$$u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=3} = 0, \tag{2.18}$$

$$u|_{t=0} = 11\cos 15\pi x. \tag{2.19}$$

1. Эта задача однородна, поэтому решение будем искать в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Подставляя эту функцию в уравнение (2.17), получаем

$$X(x)T'(t) = 3X''(x)T(t).$$

Разделив обе части последнего равенства на $3X(x)T(t) \neq 0$, имеем

$$\frac{T'}{3T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Из этих соотношений и граничных условий (2.18) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $T(t)$

$$T' + 3\lambda T = 0 \tag{2.20}$$

и задачу Штурма — Лиувилля для функции $X(x)$

$$X'' + \lambda X = 0,$$
$$X'(0) = 0, X'(3) = 0.$$

2. Рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля (можно использовать данные табл. 1. В этом примере $a^2 = 3, \;\; l = 3$). Находим

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{3}\right)^2, \; n = 0, 1, 2, \dots \, ,$$
$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{3}, \; n = 0, 1, 2, \dots \, .$$

3. Найдем теперь решение уравнения (2.20), которое при $\lambda = \lambda_n$ имеет вид

$$T_n' + 3\left(\frac{\pi n}{3}\right)^2 T_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \, .$$

Это линейное уравнение первого порядка, его решение

$$T_n(t) = A_n e^{-3\left(\frac{\pi n}{3}\right)^2 t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \, ,$$

где A_n — произвольные постоянные.

Таким образом, при любых A_n все функции

$$u_n(x,t) = A_n e^{-3\left(\frac{\pi n}{3}\right)^2 t} \cos\frac{n\pi x}{3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

удовлетворяют уравнению (2.17) и условиям (2.18).

4. Решение задачи ищем в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-3\left(\frac{\pi n}{3}\right)^2 t} \cos\frac{n\pi x}{3}.$$

Эта функция является решением уравнения (2.17) и удовлетворяет граничным условиям (2.18) при любых A_n, при которых ряд сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

5. Найдем A_n так, чтобы функция $u(x,t)$ удовлетворяла начальному условию (2.19). Имеем

$$u|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{3} = 11\cos 15\pi x.$$

Отсюда

$$A_{45} = 11,$$

$$A_n = 0, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \; n \neq 45.$$

Подставляя эти коэффициенты в функцию $u(x,t)$, получим решение рассматриваемой задачи

$$u(x,t) = 11e^{-3\left(\frac{45\pi}{3}\right)^2 t} \cos\frac{45\pi x}{3}.$$

Ответ. $u(x,t) = 11e^{-675\pi^2 t}\cos 15\pi x.$

Пример 2.3 (пример выполнения задачи 19).

Решить однородную смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = 9u_{xx}, \tag{2.21}$$

$$u_x|_{x=0} = 0, u|_{x=1,5} = 0, \tag{2.22}$$

$$u|_{t=0} = 8\cos 5\pi x. \tag{2.23}$$

1. Эта задача однородна, поэтому решение будем искать в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Подставляя эту функцию в уравнение (2.21), получаем

$$X(x)T'(t) = 9X''(x)T(t).$$

Разделив обе части последнего равенства на $9X(x)T(t) \neq 0$, имеем

$$\frac{T'}{9T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Из этих соотношений и граничных условий (2.22) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $T(t)$

$$T' + 9\lambda T = 0 \tag{2.24}$$

и задачу Штурма — Лиувилля для функции $X(x)$

$$X'' + \lambda X = 0,$$
$$X'(0) = 0, X(1,5) = 0.$$

2. Рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля (можно использовать данные табл. 1. В этом примере $a^2 = 9, \quad l = 1,5$). Находим

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{3}\right)^2, \ n = 0, 1, 2, \dots ,$$

$$X_n(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{3}, \ n = 0, 1, 2, \dots .$$

3. Найдем теперь решение уравнения (2.24), которое при $\lambda = \lambda_n$ имеет вид

$$T_n' + \left(\frac{3(2n+1)\pi}{3}\right)^2 T_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Это линейное уравнение первого порядка, его решение

$$T_n(t) = A_n e^{-((2n+1)\pi)^2 t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

где A_n — произвольные постоянные.

Таким образом, при любых A_n все функции

$$u_n(x,t) = A_n e^{-((2n+1)\pi)^2 t} \cos\frac{(2n+1)\pi x}{3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

удовлетворяют уравнению (2.21) и условиям (2.22).

4. Решение задачи ищем в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-((2n+1)\pi)^2 t} \cos\frac{(2n+1)\pi x}{3}.$$

Эта функция является решением уравнения (2.21) и удовлетворяет граничным условиям (2.22) при любых A_n, при которых ряд сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

5. Найдем A_n так, чтобы функция $u(x,t)$ удовлетворяла начальному условию (2.23). Имеем

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{(2n+1)\pi x}{3} = 8\cos 5\pi x.$$

Отсюда

$$A_7 = 8,$$

$$A_n = 0, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \ n \neq 7.$$

Подставляя эти коэффициенты в функцию $u(x,t)$, получим решение рассматриваемой задачи

$$u(x,t) = 8e^{-(15\pi)^2 t}\cos\frac{15\pi x}{3}.$$

Ответ. $u(x,t) = 8e^{-225\pi^2 t}\cos 5\pi x.$

2.2. Неоднородная смешанная задача для уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями

В задачах о распространении тепла в стержне, концы которого поддерживаются при заданных температурах, граничные условия имеют вид

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t).$$

В этом случае мы приходим к неоднородной смешанной задаче для уравнения теплопроводности с неоднородностью в граничных условиях. Подробно метод решения таких задач рассмотрен для уравнений гиперболического типа. Чтобы решить такую задачу, необходимо:

1. Снять неоднородность граничных условий, т. е. подобрать функцию $v(x.t)$, удовлетворяющую этим условиям.

2. Решение исходной задачи искать в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

где $v(x,t)$ — функция, удовлетворяющая граничным условиям, $w(x,t)$ — новая неизвестная функция.

3. Подставить $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ в исходную задачу и получить задачу для функции $w(x,t)$, решив которую, сможем записать окончательное решение.

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 2.4 (пример выполнения задачи 20).

Решить неоднородную задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = 16u_{xx} \tag{2.25}$$

при неоднородных граничных условиях

$$u|_{x=0} = -5, u|_{x=3} = 4 \tag{2.26}$$

и начальном условии

$$u|_{t=0} = -5 + 3x + 15\sin 4\pi x. \tag{2.27}$$

Задача неоднородная с неоднородностью в граничных условиях. Поэтому

1) подберем функцию $v(x,t)$, удовлетворяющую граничным условиям (2.26). Так как оба из условий (2.26) являются условиями первого рода, то эту функцию можно взять в виде

$$v(x,t) = -5 + \frac{x}{3}(4+5) = -5 + 3x;$$

2) решение исходной задачи искать в виде

$$u(x,t) = -5 + 3x + w(x,t), \tag{2.28}$$

где $w(x,t)$ — новая неизвестная функция;

3) подставим (2.28) в исходную задачу (2.25)–(2.26)–(2.27) и получим задачу для функции $w(x,t)$.

Из уравнения (2.25) имеем

$$w_{tt} = 16w_{xx}.$$

Из граничных условий (2.26)

$$u|_{x=0} = (-5+3x+w)|_{x=0} = -5 + w|_{x=0} = -5,$$

$$u|_{x=3} = (-5+3x+w)|_{x=3} = 4 + w|_{x=3} = 4$$

имеем

$$w|_{x=0} = 0,\ w|_{x=3} = 0.$$

Из начального условия (2.27) получим начальное условие для функции w:

$$u|_{t=0} = -5 + 3x + w|_{t=0} = -5 + 3x + 15\sin 4\pi x.$$

Откуда

$$w|_{t=0} = 15\sin 4\pi x.$$

Итак, для функции $w(x,t)$ получили следующую задачу:

$$w_{tt} = 16w_{xx}, \tag{2.29}$$

$$w\big|_{x=0} = 0, \quad w\big|_{x=3} = 0, \tag{2.30}$$

$$w\big|_{t=0} = 15\sin 4\pi x. \tag{2.31}$$

1. Эта задача однородна, поэтому решение будем искать в виде

$$w(x,t) = X(x)T(t).$$

Подставляя эту функцию в уравнение (2.29), получаем

$$X(x)T'(t) = 16X''(x)T(t).$$

Разделив обе части последнего равенства на $16X(x)T(t) \neq 0$, имеем

$$\frac{T'}{16T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Из этих соотношений и граничных условий (2.30) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $T(t)$

$$T' + 16\lambda T = 0 \tag{2.32}$$

и задачу Штурма — Лиувилля для функции $X(x)$

$$X'' + \lambda X = 0,$$
$$X(0) = 0, X(3) = 0.$$

2. Рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля (можно использовать данные табл. 1. В этом примере $a^2 = 16, \quad l = 3$).

Находим

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{3}\right)^2, \ n = 1, 2, \dots ,$$

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{3}, \ n = 1, 2, \dots .$$

3. Найдем теперь решение уравнения (2.32), которое при $\lambda = \lambda_n$ имеет вид

$$T_n' + 16\left(\frac{\pi n}{3}\right)^2 T_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Это линейное уравнение первого порядка, его решение

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{4\pi n}{3}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

где A_n — произвольные постоянные.

Таким образом, при любых A_n все функции

$$w_n(x,t) = A_n e^{-\left(4\frac{\pi n}{3}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{3}, \quad n = 1, 2, \dots$$

удовлетворяют уравнению (2.29) и условиям (2.30).

4. Решение задачи ищем в виде ряда

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{4\pi n}{3}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

Эта функция является решением уравнения (2.29) и удовлетворяет граничным условиям (2.30) при любых A_n, при которых ряд сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

5. Найдем A_n так, чтобы функция $w(x,t)$ удовлетворяла начальному условию (2.31). Имеем

$$w|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{3} = 15\sin 4\pi x.$$

Отсюда

$$A_{12} = 15,$$

$$A_n = 0, \quad n \in \mathbf{N}, \; n \neq 12.$$

Подставляя эти коэффициенты в функцию $w(x,t)$, получим решение однородной задачи

$$w(x,t) = 15e^{-\left(\frac{4\cdot 12\pi}{3}\right)^2 t} \sin\frac{12\pi x}{3}.$$

Тогда решение исходной задачи

$$u(x,t) = -5 + 3x + e^{-256\pi^2 t} \sin 4\pi x.$$

Ответ. $u(x,t) = -5 + 3x + 15e^{-256\pi^2 t} \sin 4\pi x.$

2.3. Неоднородная смешанная задача для уравнения теплопроводности с неоднородностью в уравнении

Рассмотрим смешанную задачу для неоднородного уравнения теплопроводности. Подробно метод решения смешанной задачи с неоднородностью в уравнении рассмотрен для уравнений гиперболического типа. Приведем примеры.

Пример 2.5 (пример выполнения задачи 21).

Найти решение смешанной задачи

$$u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + (\cos t + 3\sin t)\sin 4x, \tag{2.33}$$

$$u|_{x=0} = 0, \, u|_{x=\pi} = 0, \tag{2.34}$$

$$u|_{t=0} = 12\sin x. \tag{2.35}$$

Задача неоднородная с неоднородностью в уравнении, поэтому решение ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} T_n(t) X_n(x), \tag{2.36}$$

где $X_n(x)$ — собственные функции вспомогательной однородной задачи.

1. Решаем вспомогательную однородную задачу для нахождения собственных функций

$$u_{tt} = \frac{1}{16} u_{xx},$$

$$u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=\pi} = 0.$$

Воспользуемся данными, представленными в табл. 1.
У нас $a = \frac{1}{4}, l = \pi$. Собственные функции соответствующей задачи Штурма — Лиувилля для рассматриваемой задачи имеют вид

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{\pi} = \sin nx, n = 1, 2, \ldots .$$

2. Переходим к решению основной задачи (2.33)–(2.34)–(2.35). Ее решение будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx. \tag{2.37}$$

Подставим (2.37) в уравнение (2.33)

$$\sum_{i=1}^{\infty} (T_n' + \frac{1}{16} n^2 T_n) \sin nx = (\cos t + 3\sin t) \sin 4x.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых $\sin nx$, получим при $n = 4$:

$$T_4' + T_4 = \cos t + 3\sin t;$$

при $n \in N, n \neq 4$:

$$T_n' + \frac{n^2}{16} T_n = 0.$$

Подставив ряд (2.37) в условие (2.35), получим

$$u|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(0)\sin nx = 12\sin x,$$

откуда

$$T_1(0) = 12,$$

$$T_n(0) = 0,\ n \in \mathbf{N}, n \neq 1.$$

Итак, получили три задачи Коши:

$$\begin{cases} T_4' + T_4 = \cos t + 3\sin t, \\ T_4(0) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1' + \frac{1}{16} T_1 = 0, \\ T_1(0) = 12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_n' + \frac{n^2}{16} T_n = 0, \\ T_n(0) = 0, \quad n \in \mathbf{N}, n \neq 1, n \neq 4. \end{cases}$$

Третья задача имеет только тривиальное решение, так как $T_n \equiv 0$ — очевидное решение этой задачи, а задача Коши, как известно, имеет единственное решение.

Найдем $T_4(t)$:

$$T_4(t) = T_4^{oo}(t) + T_4^*(t),$$

где $T_4^{oo}(t)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, $T_4^*(t)$ — частное решение неоднородного уравнения.

Решим соответствующее однородное уравнение

$$T_4' + T_4 = 0.$$

Это линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид

$$T_4^{oo}(t) = A_4 e^{-t},$$

где A_4 — произвольная постоянная.

Частное решение $T_4^*(t)$ неоднородного уравнения будем искать методом неопределенных коэффициентов. Пусть

$$T_4^*(t) = a\cos t + b\sin t.$$

Для определения коэффициентов a и b подставим эту функцию в неоднородное уравнение и сравним коэффиценты при $\cos t$ и $\sin t$ в правой и левой частях полученного равенства:

$$\begin{array}{r|l} 1 & T_4^* = a\cos t + b\sin t, \\ 1 & (T_4^*)' = -a\sin t + b\cos t. \end{array}$$

Здесь слева расставлены коэффициенты, на которые соответствующие производные умножаются в уравнении. Имеем

$$(a+b)\cos t + (b-a)\sin t = \cos t + 3\sin t.$$

Откуда

$$a + b = 1,$$

$$b - a = 3.$$

Находим

$$a = -1, \quad b = 2.$$

Таким образом, частное решение

$$T_4^*(t) = -\cos t + 2\sin t$$

и общее решение неоднородного уравнения

$$T_4(t) = A_4 e^{-t} - \cos t + 2\sin t.$$

Определим A_4 так, чтобы выполнялось условие здачи Коши:

$$T_4(0) = A_4 - 1 = 0.$$

Откуда

$$A_4 = 1.$$

Тогда

$$T_4(t) = e^{-t} - \cos t + 2\sin t.$$

Найдем $T_1(t)$. Общее решение уравнения имеет вид

$$T_1(t) = A_1 e^{-\frac{1}{16}t}.$$

Из начального условия задачи Коши находим

$$T_1(0) = A_1 = 12.$$

Итак,

$$T_1(t) = 12e^{-\frac{t}{16}},$$

$$T_4(t) = e^{-t} - \cos t + 2\sin t,$$

$$T_n(t) = 0, \ n \in \mathbf{N}, n \neq 1, n \neq 4.$$

Подставляя найденные T_n в функцию (2.37), получим решение исходной задачи

$$u(x,t) = 12e^{-\frac{t}{16}} \sin x + (e^{-t} - \cos t + 2\sin t) \sin 4x.$$

Далее делаем проверку полученного ответа.

Ответ. $u(x,t) = 12e^{-t/16} \sin x + (e^{-t} - \cos t + 2\sin t) \sin 4x.$

2.4. Неоднородная смешанная задача для общих уравнений параболического типа

Как и в случае уравнений гиперболического типа, метод Фурье применим и при решении смешанной задачи для более общих уравнений параболического типа.

Пример 2.6.

Найти решение неоднородного уравнения

$$u_t - u_{xx} + 2u_x - u = e^x \sin x - t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \tag{2.38}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{x=0} = 1 + t, u|_{x=\pi} = 1 + t \tag{2.39}$$

и начальному условию

$$u|_{t=0} = 1 + e^x \sin 2x. \tag{2.40}$$

Это смешанная задача для неоднородного уравнения параболического типа с неоднородностью в граничных условиях. Чтобы решить такую задачу, необходимо:

1) снять неоднородность граничных условий (2.38), т. е. подобрать функцию $v(x,t)$, удовлетворяющую этим условиям. Так как оба эти условия являются условиями первого рода, функцию $v(x,t)$ можно взять в виде

$$v(x,t) = 1 + t + \frac{x}{\pi}((1+t) - (1+t)) = 1 + t;$$

2) решение исходной задачи будем искать в виде

$$u(x,t) = 1 + t + w(x,t),$$

где $w(x,t)$ — новая неизвестная функция;

3) подставим $u(x,t) = 1 + t + w(x,t)$ в исходную задачу (2.38) – (2.39) – (2.40):

а) в уравнение (2.38)

$$1 + w_t - w_{xx} + 2w_x - (1+t) - w = e^x \sin x - t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$

б) в граничные условия (2.39)

$$u|_{x=0} = 1 + t + w|_{x=0} = 1 + t,$$

$$u|_{x=\pi} = 1 + t + w|_{x=\pi} = 1 + t;$$

в) в начальное условие (2.40)

$$u|_{t=0} = 1 + w|_{t=0} = 1 + e^x \sin 2x.$$

Таким образом, получаем задачу для функции $w(x,t)$

$$w_t - w_{xx} + 2w_x - w = e^x \sin x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=\pi} = 0;$$

$$w\big|_{t=0} = e^x \sin 2x;$$

4) решим полученную задачу. Она является неоднородной задачей с неоднородностью в уравнении. Поэтому ее решение будем искать в виде ряда

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x),$$

где $X_n(x)$ — собственные функции вспомогательной однородной задачи.

1. Решаем вспомогательную однородную задачу для нахождения собственных функций:

$$w_t - w_{xx} + 2w_x - w = 0,$$

$$w\big|_{x=0} = 0, w\big|_{x=\pi} = 0.$$

Воспользоваться данными, представленными в табл. 1, мы не можем. Будем искать решение уравнения в виде

$$w(x,t) = X(x)T(t).$$

Причем

$$w\big|_{x=0} = w\big|_{x=\pi} = 0.$$

Откуда

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Подставим фунцию $w(x,t) = X(x)T(t)$ в однородное уравнение и, разделив переменные, получим

$$XT' - X''T + 2X'T - XT = 0,$$

$$\frac{T' - T}{T} = \frac{X'' - 2X'}{X} = -\lambda = const.$$

Поэтому функция $X(x)$ является решением задачи Штурма — Лиувилля:

$$X'' - 2X' + \lambda X = 0,$$

$$X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0.$$

Решим эту задачу. Общее решение уравнения имеет вид

$$X(x) = e^x (C_1 \cos\sqrt{\lambda - 1}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda - 1}x).$$

Из граничных условий следует

$$X(0) = C_1 = 0,$$

$$X(\pi) = e^\pi C_2 \sin\sqrt{\lambda - 1}\pi = 0.$$

Откуда

$$\sin\sqrt{\lambda - 1}\pi = 0.$$

Или

$$\sqrt{\lambda - 1}\pi = \pi n, n = 1, 2, \ldots\ .$$

Таким образом,

$$X_n = e^x \sin nx.$$

2. Переходим к решению основной задачи для функции w. Ее решение будем искать в виде

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(t) e^x \sin nx.$$

Подставим $w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(t)e^x \sin nx$ в неоднородное уравнение для функции w:

$$\sum_{i=1}^{\infty} T_n' e^x \sin nx - \sum_{i=1}^{\infty} T_n e^x (\sin nx + 2n\cos nx - n^2 \sin nx) +$$

$$+2\sum_{i=1}^{\infty} T_n e^x (\sin nx + n\cos nx) - \sum_{i=1}^{\infty} T_n e^x \sin nx = e^x \sin x.$$

Или

$$\sum_{i=1}^{\infty} (T_n' + n^2 T_n) e^x \sin nx = e^x \sin x.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях $e^x \sin nx$, получим

при $n = 1$:

$$T_1' + 1 = 1;$$

при $n \in N, n \neq 1$:

$$T_n' + n^2 T_n = 0.$$

Подставив функцию

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(t) e^x \sin nx$$

в условие $w|_{t=0} = e^x \sin 2x$, получим

$$w|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(0) e^x \sin nx = e^x \sin 2x.$$

Откуда

$$T_2(0) = 1,$$

$$T_n(0) = 0,\ n \in \mathbf{N}, n \neq 2.$$

Итак, получили три задачи Коши:

$$\begin{cases} T_1' + T_1 = 1, \\ T_1(0) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_2' + 4T_2 = 0, \\ T_2(0) = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_n' + n^2 T_n = 0, \\ T_n(0) = 0, \quad n \in \mathbf{N}, n \neq 1, n \neq 2. \end{cases}$$

Третья задача имеет только тривиальное решение, так как $T_n \equiv 0$ — очевидное решение этой задачи, а задача Коши, как известно, имеет единственное решение.

Найдем $T_1(t)$. Общее решение линейного неоднородного уравнения первого порядка имеет вид

$$T_1(t) = e^{-t}(A_1 + e^t) = A_1 e^{-t} + 1,$$

где A_1 — произвольная постоянная. Определим A_1 так, чтобы выполнялось условие задачи Коши:

$$T_1(0) = A_1 + 1 = 0,$$

$$A_1 = -1.$$

Тогда

$$T_1(t) = 1 - e^{-t}.$$

Найдем $T_2(t)$. Общее решение уравнения

$$T_2' + 4T_2 = 0$$

имеет вид
$$T_2(t) = A_2 e^{-4t}.$$

Из начального условия задачи Коши находим
$$T_2(0) = A_2 = 1.$$

Итак,
$$T_1(t) = e^{-t} - 1,$$
$$T_2(t) = e^{-4t},$$
$$T_n(t) = 0,\ n \in \mathbf{N}, n \neq 1, n \neq 2.$$

Подставляя найденные T_n в функцию
$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(t) e^x \sin nx,$$
получим решение задачи для функции $w(x,t)$
$$w(x,t) = (1 - e^{-t}) e^x \sin x + e^{x-4t} \sin 2x.$$

Тогда решение исходной задачи
$$u(x,t) = 1 + t + (e^{-t} - 1) e^x \sin x + e^{x-4t} \sin 2x.$$

Полученный ответ можно легко проверить.

Ответ. $u(x,t) = 1 + t + (1 - e^{-t}) e^x \sin x + e^{x-4t} \sin 2x.$

2.5. Индивидуальные задания к главе 2

Задача 17

Найти решение смешанной задачи:

17.1. $$\begin{aligned} &u_t = 8u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0, u|_{x=3} = 0, \\ &u|_{t=0} = \sin 3\pi x + \sin 5\pi x. \end{aligned}$$

17.2. $$\begin{aligned} &u_t = 6u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0, u|_{x=8} = 0, \\ &u|_{t=0} = 3\sin \pi x + 5\sin 7\pi x. \end{aligned}$$

17.3. $$\begin{aligned} &u_t = 9u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0, u|_{x=3} = 0, \\ &u|_{t=0} = 3\sin 7\pi x + 5\sin 8\pi x. \end{aligned}$$

17.4. $$\begin{aligned} &u_t = 9u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = 0, \\ &u|_{t=0} = 7\sin 2\pi x + 32\sin 7\pi x. \end{aligned}$$

17.5. $$\begin{aligned} &u_t = 25u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0, u|_{x=2} = 0, \\ &u|_{t=0} = 12\sin 6\pi x + 3\sin 7\pi x. \end{aligned}$$

17.6. $$\begin{aligned} &u_t = 25u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0, u|_{x=5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 16\sin \pi x + 2\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

17.7. $$\begin{aligned} &u_t = 5u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0, u|_{x=3} = 0, \\ &u|_{t=0} = 9\sin 8\pi x + 5\sin 9\pi x. \end{aligned}$$

17.8. $$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0, u|_{x=4} = 0, \\ &u|_{t=0} = \sin \pi x + 18\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

17.9. $$\begin{aligned} &u_t = 9u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0, u|_{x=8} = 0, \\ &u|_{t=0} = 7\sin \pi x + 6\sin 2\pi x. \end{aligned}$$

17.10. $$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0, u|_{x=9} = 0, \\ &u|_{t=0} = 42\sin \pi x + 3\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

17.11. $$\begin{aligned} &u_t = 3u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0, u|_{x=12} = 0, \\ &u|_{t=0} = \sin \pi x + 8\sin 2\pi x. \end{aligned}$$

17.12. $$\begin{aligned} &u_t = 5u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0, u|_{x=3} = 0, \\ &u|_{t=0} = 6\sin 3\pi x + \sin 4\pi x. \end{aligned}$$

17.13. $$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0, u|_{x=7} = 0, \\ &u|_{t=0} = 2\sin 2\pi x + 22\sin 8\pi x. \end{aligned}$$

17.14. $$\begin{aligned} &u_t = 16u_{xx},\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=5} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 9\sin 2\pi x + \sin 4\pi x. \end{aligned}$$

17.15. $$\begin{aligned} &u_t = 36u_{xx},\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=4} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 32\sin \pi x + \sin 8\pi x. \end{aligned}$$

17.16. $$\begin{aligned} &u_t = 9u_{xx},\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=2} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 13\sin 7\pi x. \end{aligned}$$

17.17. $$\begin{aligned} &u_t = 17u_{xx},\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=3} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = \sin 2\pi x - 55\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

17.18 $$\begin{aligned} &u_t = u_{xx},\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=8} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 24\sin 2\pi x + 5\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

17.19. $$\begin{aligned} &u_t = 9u_{xx},\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=3} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 7\sin 2\pi x + 8\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

17.20. $$\begin{aligned} &u_t = 3u_{xx},\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=8} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 31\sin 4\pi x + 14\sin 2\pi x. \end{aligned}$$

17.21. $$\begin{aligned} &u_t = 25u_{xx}, \\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=8} = 0, \\ &u\big|_{t=0} = 123\sin 2\pi x + 5\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

17.22. $$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx}, \\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=7} = 0, \\ &u\big|_{t=0} = 5\sin 3\pi x + 4\sin 5\pi x. \end{aligned}$$

17.23. $$\begin{aligned} &u_t = 3u_{xx}, \\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=3} = 0, \\ &u\big|_{t=0} = 9\sin 7\pi x + \sin 8\pi x. \end{aligned}$$

17.24. $$\begin{aligned} &u_t = 25u_{xx}, \\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=5} = 0, \\ &u\big|_{t=0} = \sin \pi x + 3\sin 5\pi x. \end{aligned}$$

17.25. $$\begin{aligned} &u_t = 2u_{xx}, \\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=9} = 0, \\ &u\big|_{t=0} = 9\sin 3\pi x + 8\sin 4\pi x. \end{aligned}$$

Задача 18

Найти решение смешанной задачи:

18.1. $$\begin{aligned} &u_t = 3u_{xx}, \\ &u_x\big|_{x=0} = 0,\, u_x\big|_{x=2} = 0, \\ &u\big|_{t=0} = 3\cos 5\pi x. \end{aligned}$$

18.2. $$\begin{aligned} &u_t = 6u_{xx}, \\ &u_x\big|_{x=0} = 0,\, u_x\big|_{x=4} = 0, \\ &u\big|_{t=0} = 2\cos 6\pi x. \end{aligned}$$

18.3. $$\begin{aligned} &u_t = 5u_{xx}, \\ &u_x\big|_{x=0} = 0,\, u_x\big|_{x=9} = 0, \\ &u\big|_{t=0} = 15\cos 13\pi x. \end{aligned}$$

18.4. $$\begin{aligned} &u_t = 36u_{xx}, \\ &u_x\big|_{x=0} = 0,\, u_x\big|_{x=3} = 0, \\ &u\big|_{t=0} = 8\cos 12\pi x. \end{aligned}$$

18.5. $$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx}, \\ &u_x\big|_{x=0} = 0,\, u_x\big|_{x=7} = 0, \\ &u\big|_{t=0} = 3\cos 9\pi x. \end{aligned}$$

18.6. $$\begin{aligned} &u_t = 9u_{xx}, \\ &u_x\big|_{x=0} = 0,\, u_x\big|_{x=5} = 0, \\ &u\big|_{t=0} = 2\cos 12\pi x. \end{aligned}$$

18.7. $$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=9} = 0, \\ &u|_{t=0} = -\cos 6\pi x. \end{aligned}$$

18.8. $$\begin{aligned} &u_t = 25u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=3} = 0, \\ &u|_{t=0} = 12\pi \cos 3\pi x. \end{aligned}$$

18.9. $$\begin{aligned} &u_t = 49u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=1} = 0, \\ &u|_{t=0} = 6 \cos 12\pi x. \end{aligned}$$

18.10. $$\begin{aligned} &u_t = 9u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=8} = 0, \\ &u|_{t=0} = 13cos\pi x. \end{aligned}$$

18.11. $$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=6} = 0, \\ &u|_{t=0} = 32 \cos 6\pi x. \end{aligned}$$

18.12. $$\begin{aligned} &u_t = 9u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=11} = 0, \\ &u|_{t=0} = 8 \cos 7\pi x. \end{aligned}$$

18.13. $$\begin{aligned} &u_t = 16u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=3} = 0, \\ &u|_{t=0} = -5 \cos 4\pi x. \end{aligned}$$

18.14. $$\begin{aligned}&u_t = u_{xx},\\&u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=2} = 0,\\&u|_{t=0} = 3\cos 4\pi x.\end{aligned}$$

18.15. $$\begin{aligned}&u_t = 9u_{xx},\\&u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=12} = 0,\\&u|_{t=0} = 17\cos 7\pi x.\end{aligned}$$

18.16. $$\begin{aligned}&u_t = 4u_{xx},\\&u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=8} = 0,\\&u|_{t=0} = -7\cos 5\pi x.\end{aligned}$$

18.17. $$\begin{aligned}&u_t = 36u_{xx},\\&u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=4} = 0,\\&u|_{t=0} = -54\cos 9\pi x.\end{aligned}$$

18.18. $$\begin{aligned}&u_t = 25u_{xx},\\&u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=3} = 0,\\&u|_{t=0} = 31\cos 5\pi x.\end{aligned}$$

18.19. $$\begin{aligned}&u_t = 4u_{xx},\\&u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=3} = 0,\\&u|_{t=0} = 2\cos 9\pi x.\end{aligned}$$

18.20. $$\begin{aligned}&u_t = 9u_{xx},\\&u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=8} = 0,\\&u|_{t=0} = 5\cos 4\pi x.\end{aligned}$$

18.21. $$\begin{aligned} &u_t = 16u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=9} = 0, \\ &u|_{t=0} = -3\cos 9\pi x. \end{aligned}$$

18.22. $$\begin{aligned} &u_t = 25u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=4} = 0, \\ &u|_{t=0} = 13\cos 5\pi x. \end{aligned}$$

18.23. $$\begin{aligned} &u_t = 9u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=4} = 0, \\ &u|_{t=0} = 12\cos 9\pi x. \end{aligned}$$

18.24. $$\begin{aligned} &u_t = 25u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=7} = 0, \\ &u|_{t=0} = 24\cos 5\pi x. \end{aligned}$$

18.25. $$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=15} = 0, \\ &u|_{t=0} = 2\cos 2\pi x. \end{aligned}$$

Задача 19

Найти решение смешанной задачи:

19.1. $$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u|_{x=1{,}5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 24\cos 3\pi x. \end{aligned}$$

19.2. $$\begin{aligned} &u_t = 9u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=3,5} = 0, \\ &u|_{t=0} = \sin 7\pi x. \end{aligned}$$

19.3. $$\begin{aligned} &u_t = 16u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\ u|_{x=2,5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 23\cos 3\pi x. \end{aligned}$$

19.4. $$\begin{aligned} &u_t = 16u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=1,5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 3\sin 5\pi x. \end{aligned}$$

19.5. $$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\ u|_{x=2,5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 23\cos 5\pi x. \end{aligned}$$

19.6. $$\begin{aligned} &u_t = 9u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=2,5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 4\sin 7\pi x. \end{aligned}$$

19.7. $$\begin{aligned} &u_t = 81u_{xx}, \\ &u_x|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1,5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 3\cos 5\pi x. \end{aligned}$$

19.8. $$\begin{aligned} &u_t = 16u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=2,5} = 0, \\ &u|_{t=0} = 5\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

19.9. $\begin{aligned} & u_t = 9u_{xx}, \\ & u_x|_{x=0} = 0,\, u|_{x=3{,}5} = 0, \\ & u|_{t=0} = 23\cos 3\pi x. \end{aligned}$

19.10. $\begin{aligned} & u_t = 4u_{xx}, \\ & u|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=2{,}5} = 0, \\ & u|_{t=0} = 12\sin 13\pi x. \end{aligned}$

19.11. $\begin{aligned} & u_t = 9u_{xx}, \\ & u_x|_{x=0} = 0,\, u|_{x=1{,}5} = 0, \\ & u|_{t=0} = 14\cos 5\pi x. \end{aligned}$

19.12. $\begin{aligned} & u_t = u_{xx}, \\ & u|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=4{,}5} = 0, \\ & u|_{t=0} = 7\sin 5\pi x. \end{aligned}$

19.13. $\begin{aligned} & u_t = 81u_{xx}, \\ & u|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=2{,}5} = 0, \\ & u|_{t=0} = 23\sin 7\pi x. \end{aligned}$

19.14. $\begin{aligned} & u_t = 4u_{xx}, \\ & u_x|_{x=0} = 0,\, u|_{x=1{,}5} = 0, \\ & u|_{t=0} = 8\cos 15\pi x. \end{aligned}$

19.15. $\begin{aligned} & u_t = 9u_{xx}, \\ & u|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=3{,}5} = 0, \\ & u|_{t=0} = 31\sin 7\pi x. \end{aligned}$

19.16. $$\begin{aligned}&u_t = 16u_{xx},\\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u|_{x=1{,}5} = 0,\\ &u|_{t=0} = 33\cos 7\pi x.\end{aligned}$$

19.17. $$\begin{aligned}&u_t = 25u_{xx},\\ &u|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=3{,}5} = 0,\\ &u|_{t=0} = 42\sin 9\pi x.\end{aligned}$$

19.18. $$\begin{aligned}&u_t = 9u_{xx},\\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u|_{x=2{,}5} = 0,\\ &u|_{t=0} = 7\cos 13\pi x.\end{aligned}$$

19.19. $$\begin{aligned}&u_t = 16u_{xx},\\ &u|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=1{,}5} = 0,\\ &u|_{t=0} = 15\sin 7\pi x.\end{aligned}$$

19.20. $$\begin{aligned}&u_t = 25u_{xx},\\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u|_{x=7{,}5} = 0,\\ &u|_{t=0} = 12\cos 5\pi x.\end{aligned}$$

19.21. $$\begin{aligned}&u_t = 64u_{xx},\\ &u|_{x=0} = 0,\, u_x|_{x=3{,}5} = 0,\\ &u|_{t=0} = 24\sin 13\pi x.\end{aligned}$$

19.22. $$\begin{aligned}&u_t = 81u_{xx},\\ &u_x|_{x=0} = 0,\, u|_{x=6{,}5} = 0,\\ &u|_{t=0} = 44\cos 5\pi x.\end{aligned}$$

19.23. $u_t = 16u_{xx},$
$u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=2,5} = 0,$
$u|_{t=0} = 5\sin 7\pi x.$

19.24 $u_t = 49u_{xx},$
$u_x|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1,5} = 0,$
$u|_{t=0} = 25\cos 3\pi x.$

19.25. $u_t = 9u_{xx},$
$u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=3,5} = 0,$
$u|_{t=0} = 15\sin 5\pi x.$

Задача 20

Найти решение смешанной задачи:

20.1. $u_t = 49u_{xx},$
$u|_{x=0} = -10,\ u|_{x=4} = 6,$
$u|_{t=0} = -10 + 4x + 5\sin 3\pi x.$

20.2. $u_t = 49u_{xx},$
$u|_{x=0} = -4,\ u|_{x=3} = 2,$
$u|_{t=0} = -4 + 2x + 8\sin 2\pi x.$

20.3. $u_t = 49u_{xx},$
$u|_{x=0} = -8,\ u|_{x=2} = 4,$
$u|_{t=0} = -8 + 6x + 3\sin 8\pi x.$

20.4. $$\begin{aligned} &u_t = 16u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 2,\, u|_{x=7} = -12, \\ &u|_{t=0} = 2 - 2x + 9\sin 5\pi x. \end{aligned}$$

20.5. $$\begin{aligned} &u_t = 36u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = -1,\, u|_{x=2} = -5, \\ &u|_{t=0} = -1 - 2x + 5\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

20.6. $$\begin{aligned} &u_t = 36u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = -12,\, u|_{x=2} = 2, \\ &u|_{t=0} = -12 + 7x + 9\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

20.7. $$\begin{aligned} &u_t = 36u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 6,\, u|_{x=7} = 8, \\ &u|_{t=0} = 6 + 2x + 2\sin 9\pi x. \end{aligned}$$

20.8. $$\begin{aligned} &u_t = 36u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = -5,\, u|_{x=4} = 7, \\ &u|_{t=0} = -5 + 3x + 3\sin 9\pi x. \end{aligned}$$

20.9. $$\begin{aligned} &u_t = 9u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = -2,\, u|_{x=9} = 16, \\ &u|_{t=0} = -2 + 2x + 2\sin 13\pi x. \end{aligned}$$

20.10. $$\begin{aligned} &u_t = 25u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = -3,\, u|_{x=3} = 12, \\ &u|_{t=0} = -3 + 5x + 5\pi\sin 13\pi x. \end{aligned}$$

20.11. $$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 4,\, u|_{x=5} = 9, \\ &u|_{t=0} = 4 + x + 17\sin \pi x. \end{aligned}$$

20.12. $$\begin{aligned} &u_t = 16u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = -7,\, u|_{x=3} = 2, \\ &u|_{t=0} = -7 + 3x + 12\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

20.13. $$\begin{aligned} &u_t = 25u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = -4,\, u|_{x=5} = 16, \\ &u|_{t=0} = -4 + 4x + \sin 9\pi x. \end{aligned}$$

20.14. $$\begin{aligned} &u_t = 16u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 3,\, u|_{x=3} = 12, \\ &u|_{t=0} = 3 + 3x + 8\sin 15\pi x. \end{aligned}$$

20.15. $$\begin{aligned} &u_t = 16u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = -9,\, u|_{x=2} = 3, \\ &u|_{t=0} = -9 + 6x + 7\sin 4\pi x. \end{aligned}$$

20.16. $$\begin{aligned} &u_t = 16u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 1,\, u|_{x=1} = 7, \\ &u|_{t=0} = 1 + 6x + 13\sin 5\pi x. \end{aligned}$$

20.17. $$\begin{aligned} &u_t = 16u_{xx}, \\ &u|_{x=0} = 4,\, u|_{x=6} = 16, \\ &u|_{t=0} = 4 + 2x + \sin 3\pi x. \end{aligned}$$

20.18. $$u_t = 9u_{xx},\quad u|_{x=0} = -9,\, u|_{x=4} = 11,\quad u|_{t=0} = -9 + 5x + 12\sin 3\pi x.$$

20.19. $$u_t = 9u_{xx},\quad u|_{x=0} = 4,\, u|_{x=5} = 14,\quad u|_{t=0} = 4 + 2x + 3\sin 12\pi x.$$

20.20. $$u_t = 9u_{xx},\quad u|_{x=0} = 8,\, u|_{x=3} = 2,\quad u|_{t=0} = 8 - 2x + 5\sin 12\pi x.$$

20.21. $$u_t = 9u_{xx},\quad u|_{x=0} = -3,\, u|_{x=3} = 9,\quad u|_{t=0} = -3 + 4x + 4\sin 12\pi x.$$

20.22. $$u_t = 4u_{xx},\quad u|_{x=0} = 5,\, u|_{x=5} = 15,\quad u|_{t=0} = 5 + 2x + 8\pi\sin 5\pi x.$$

20.23. $$u_t = 4u_{xx},\quad u|_{x=0} = -2,\, u|_{x=1} = 4,\quad u|_{t=0} = -2 + 6x + 12\sin \pi x.$$

20.24. $$u_t = 4u_{xx},\quad u|_{x=0} = 3,\, u|_{x=3} = 12,\quad u|_{t=0} = 3 + 3x + 7\pi\sin 15\pi x.$$

20.25. $u_t = 4u_{xx},$
$u|_{x=0} = -8,\ u|_{x=2} = 4,$
$u|_{t=0} = -8 + 6x + 7\sin 4\pi x.$

Задача 21

Найти решение смешанной задачи:

21.1. $u_t = 16u_{xx} + (\sin t + 2\cos t)\sin 6x,$
$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0,$
$u|_{t=0} = \sin x.$

21.2. $u_t = u_{xx} + e^{4t}\sin 8x,$
$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0,$
$u|_{t=0} = 2\sin 3x.$

21.3. $u_t = 4u_{xx} + 2\sin 3t \sin 2x,$
$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0,$
$u|_{t=0} = 6\sin 7x.$

21.4. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 5t\sin 7x,$
$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0,$
$u|_{t=0} = 3\sin x.$

21.5. $u_t = \frac{1}{81}u_{xx} + \cos t \sin 2x,$
$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0,$
$u|_{t=0} = 3\sin 6x.$

21.6. $$\begin{aligned} &u_t = 9u_{xx} + e^{-t}\sin 3x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = \sin 4x. \end{aligned}$$

21.7. $$\begin{aligned} &u_t = 36u_{xx} + e^{4t}\sin 2x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = 3\sin 4x. \end{aligned}$$

21.8. $$\begin{aligned} &u_t = 36u_{xx} + (\sin t + \cos t)\sin 3x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = \sin x. \end{aligned}$$

21.9. $$\begin{aligned} &u_t = \tfrac{1}{36}u_{xx} + (t-1)\sin 5x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = 2\sin 2x. \end{aligned}$$

21.10. $$\begin{aligned} &u_t = \tfrac{1}{36}u_{xx} + 4\cos t\sin 2x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = 5\sin 3x. \end{aligned}$$

21.11. $$\begin{aligned} &u_t = 49u_{xx} + 3\sin 2t\sin x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = \sin 3x. \end{aligned}$$

21.12. $$\begin{aligned} &u_t = \tfrac{1}{49}u_{xx} + (t+1)\sin 2x,\\ &u|_{x=0} = 0,\, u|_{x=\pi} = 0,\\ &u|_{t=0} = 3\sin x. \end{aligned}$$

21.13. $$\begin{aligned}&u_t = \tfrac{1}{49}u_{xx} + 5\cos t \sin 2x,\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 2\sin 5x.\end{aligned}$$

21.14. $$\begin{aligned}&u_t = 16u_{xx} + e^t \sin 2x,\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 3\sin 4x.\end{aligned}$$

21.15. $$\begin{aligned}&u_t = 16u_{xx} + 3\sin 2t \sin 6x,\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 2\sin x.\end{aligned}$$

21.16. $$\begin{aligned}&u_t = \tfrac{1}{16}u_{xx} + 5t \sin x,\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 6\sin 3x\end{aligned}$$

21.17. $$\begin{aligned}&u_t = \tfrac{1}{16}u_{xx} + (2\cos t + \sin t)\sin 2x,\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = \sin 5x.\end{aligned}$$

21.18. $$\begin{aligned}&u_t = 25u_{xx} + e^{-4t} \sin 8x,\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 4\sin x.\end{aligned}$$

21.19. $$\begin{aligned}&u_t = 25u_{xx} + 3\sin 4t \sin 4x,\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 2\sin 2x.\end{aligned}$$

21.20. $$\begin{aligned} &u_t = \tfrac{1}{25}u_{xx} + (2t+1))\sin 7x,\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 3\sin x. \end{aligned}$$

21.21. $$\begin{aligned} &u_t = \tfrac{1}{25}u_{xx} + 6\cos 3t\sin 2x,\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 2\sin 2x. \end{aligned}$$

21.22. $$\begin{aligned} &u_t = \tfrac{1}{9}u_{xx} + \cos 2t\sin x,\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 4\sin x,\, u_t\big|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

21.23. $$\begin{aligned} &u_t = \tfrac{1}{4}u_{xx} + 2t\sin 9x,\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = \sin 3x. \end{aligned}$$

21.24. $$\begin{aligned} &u_t = 9u_{xx} + \sin t\sin 6x,\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 3\sin x. \end{aligned}$$

21.25. $$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx} + e^{-2t}\sin 7x,\\ &u\big|_{x=0} = 0,\, u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = 2\sin 2x. \end{aligned}$$

Глава 3

Решение краевых задач для уравнения Лапласа в простейших областях методом Фурье

3.1. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге

Пусть Ω_R — круг с центром в точке $(0,0)$ радиуса R, границей которого является окружность S_R:

$$\Omega_R : \{(x,y) | x^2 + y^2 < R^2\},$$

$$S_R : \{x^2 + y^2 = R^2\}.$$

I. Рассмотрим *внутреннюю задачу Дирихле*: найти функцию, гармоническую в круге Ω_R, непрерывную в Ω_R, удовлетворяющую заданному граничному условию, т. е.

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x,y) \in \Omega_R, \tag{3.1}$$

$$u|_{S_R} = f(P), \quad P \in S_R, \tag{3.2}$$

причем $f(P)$ является непрерывно дифференцируемой на окружности S_R функцией.

В задаче (3.1)–(3.2) перейдем к полярным координатам:

$$\Delta u(r,\varphi) \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{3.3}$$

$$u\big|_{r=R} = f(\varphi), \quad f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi). \tag{3.4}$$

Из физических соображений функция $u(r,\varphi)$ должна быть ограниченной в круге Ω_R и 2π-периодической функцией:

$$u(r,\varphi + 2\pi) = u(r,\varphi)$$

$$|u| < A, \ \ (r,\varphi) \in \Omega_R, \ \ A > 0.$$

Решение задачи будем искать в виде

$$u(r,\varphi) = F(r)\Phi(\varphi) \tag{3.5}$$

Подставив (3.5) в уравнение (3.3), получим

$$\frac{1}{r}F'\Phi + F''\Phi + \frac{1}{r^2}F\Phi'' = 0.$$

Умножим последнее равенство на $\frac{r^2}{F\Phi}$:

$$\frac{r^2F'' + rF'}{F} = -\frac{\Phi''}{\Phi}$$

В последнем равенстве слева стоит функция, зависящая от переменной r, справа — от переменной φ. Равенство возможно, если обе эти функции равны одной и той же константе A:

$$\frac{r^2F'' + rF'}{F} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = A. \tag{3.6}$$

Равенства (3.2.) — это два уравнения

$$\frac{r^2F'' + rF'}{F} = A, \tag{3.7}$$

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = A. \tag{3.8}$$

Причем из периодичности функции $u(r, \varphi)$ следует периодичность функции $\Phi(\varphi)$. Выясним, какой должна быть константа A, чтобы получить 2π-периодическое решение уравнения (3.8).

1. Пусть $A < 0$. Уравнение (3.8) имеет вид

$$\Phi'' + A\Phi = 0.$$

Это линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Чтобы его решить, составим характеристическое уравнение

$$k^2 + A = 0.$$

Корни этого уравнения

$$k_1 = \sqrt{-A}, \quad k_2 = -\sqrt{-A}$$

вещественны и различны. Поэтому общее решение имеет вид

$$\Phi(\varphi) = C_1 e^{-\sqrt{-A}\varphi} + C_2 e^{\sqrt{-A}\varphi}.$$

Но эта функция не является периодической.

2. Пусть $A = 0$.

Тогда уравнение (3.2.) имеет вид

$$\Phi'' = 0.$$

Его общее решение

$$\Phi(\varphi) = C_1\varphi + C_2.$$

Эта функция также не является периодической при $C_1 \neq 0$.

3. Пусть $A > 0$. Положим $A = \lambda^2$. Тогда уравнение (3.2.) можно записать в виде

$$\Phi'' + \lambda^2\Phi = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 + \lambda^2 = 0$$

имеет мнимые корни

$$\lambda_{1,2} = \pm i.$$

В этом случае общее решение

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos\lambda\varphi + C_2 \sin\lambda\varphi$$

будет 2π-периодической функцией только при $\lambda = n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

Итак,

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos\lambda\varphi + B_n \sin\lambda\varphi. \tag{3.9}$$

Найдем функцию $F(r)$. Из уравнения (3.7) при $A = \lambda^2 = n^2$ и $n \neq 0$ получим уравнение Эйлера

$$r^2F'' + rF' - n^2F = 0. \tag{3.10}$$

Его решение будем искать в виде

$$F = r^\alpha,$$

где α — параметр, подлежащий определению. Подставив эту функцию в уравнение (3.10), получим

$$\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}r^2+\alpha r^\alpha-n^2r^\alpha=0.$$

$$r^\alpha(\alpha^2-\alpha+\alpha-n^2)=0.$$

Откуда $\alpha=\pm n$. Тогда имеем два линейно независимых решения уравнения (3.10):

$$F_1=r^n,\qquad F_2=r^{-n}.$$

Следовательно, общее решение этого уравнения имеет вид

$$F_n(r)=C_nr^n+D_nr^{-n}. \tag{3.11}$$

Рассмотрим отдельно случай $n=0$. В этом случае имеем уравнение, допускающее понижение порядка:

$$r^2F''+rF'=0.$$

Введем новую неизвестную функцию

$$F'=y,$$

$$r^2y'+ry=0,$$

$$y'+\frac{1}{r}y=0.$$

Последнее уравнение является линейным уравнением первого порядка, оно также является уравнением с разделяющимися переменными. Его общее решение

$$y=C_0e^{-\ln r}=\frac{C_0}{r}.$$

Тогда

$$F'(r) = \frac{C_0}{r}.$$

Откуда

$$F_0(r) = C_0 \ln r + D_0. \tag{3.12}$$

Учитывая равенства (3.9), (3.10) и (3.12), составим формальный ряд

$$u(r,\varphi) = C_0 \ln r + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)(C_n r^n + D_n r^{-n}).$$

Или иначе, переобозначив постоянные:

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) = C_0 \ln r + D_0 \ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^{-n} + C_n r^n) \cos n\varphi \ + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (B_n r^{-n} + D_n r^n) \sin n\varphi. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Мы сейчас рассматриваем внутреннюю задачу Дирихле. Область Ω_R содержит точку $(0,0)$. Поэтому, учитывая ограниченность функции $u(r,\varphi)$, нужно положить

$$C_0 = 0, \quad A_n = 0, \quad B_n = 0,$$

так как $\ln r,\ r^{-n}$ стремятся к бесконечности при $r \to 0$.

Тогда из формулы (3.13) получим

$$u(r,\varphi) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi \right). \tag{3.14}$$

Определим произвольные постоянные $D_0,\ C_n,\ D_n$ так, чтобы выполнялось граничное условие (3.4):

$$u\big|_{r=R} = \sum_{n=0}^{\infty} R^n \left(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\right) = f(\varphi).$$

Разложим функцию $f(\varphi)$ в полный ряд Фурье по системе функций $\{\cos nx, \sin nx\}$:

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi),$$

где α_n и β_n определяются по формулам коэффициентов Фурье. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} R^n \left(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$$

Откуда

$$C_n = \frac{\alpha_n}{R^n}, \quad B_n = \frac{\beta_n}{R^n}.$$

Подставив найденные коэффициенты в формулу (3.14), получим

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi\right). \tag{3.15}$$

Нетрудно показать, что ряд (3.15) сходится и сходятся ряды, полученные из него дифференцированием дважды по x и по t. Следовательно, формула (3.15) дает решение внутренней задачи Дирихле (3.3)–(3.4).

II. Рассмотрим *внешнюю задачу Дирихле*: найти функцию, гармоническую вне круга Ω_R, непрерывную вплоть до границы, удовлетворяющую заданному граничному условию,

т. е.

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \notin \Omega_R,$$

$$u|_{r=R} = f(\varphi).$$

Теперь область, в которой рассматривается задача, не содержит точку $(0,0)$, но она содержит бесконечно удаленную точку. Поэтому в формуле (3.13) нужно положить

$$C_0 = 0, \quad C_n = 0, \quad D_n = 0,$$

так как $\ln r,\ r^n$ стремятся к бесконечности при $r \to \infty$. Тогда получим

$$u(r, \varphi) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \right). \tag{3.16}$$

Определим произвольные постоянные $D_0,\ A_n,\ B_n$ так, чтобы выполнялось граничное условие (3.4):

$$u|_{r=R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^n} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \right) = f(\varphi).$$

Разложим функцию $f(\varphi)$ в полный ряд Фурье по системе функций $\{\cos nx, \sin nx\}$:

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi),$$

где α_n и β_n определяются по формулам коэффициентов Фурье. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^n} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$$

Откуда

$$D_0 = \alpha_0, \quad A_n = \alpha_n R^n, \quad B_n = \beta_n R^n, \quad n = 1, 2, \ldots \,.$$

Подставив найденные коэффициенты в формулу (3.16), получим

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi)\,. \tag{3.17}$$

Анализируя формулы (3.15) и (3.17), можно сделать следующий вывод:

при решении внутренней и внешней задач Дирихле для уравнения Лапласа в круге необходимо разложить граничную функцию в полный ряд Фурье по системе функций $\{\cos n\varphi, \sin n\varphi\}$ *и каждое* n*-е слагаемое этого ряда умножить на* $\left(\frac{r}{R}\right)^n$ *для внутренней задачи Дирихле*
и на $\left(\frac{R}{r}\right)^n$ *— для внешней.*

Пример 3.1 (пример выполнения задачи 22).

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге

$$\Delta u = 0, 0 \leq r < 2,$$

$$u|_{r=2} = 2\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + \sin\varphi.$$

Это внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Функция, определяемая формулой (3.15), дает решение этой задачи. Используя тригонометрические формулы тройного угла, представим граничную функцию в виде

$$u|_{r=2} = 2\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + \sin\varphi =$$

$$= \frac{3}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 3\varphi - \frac{3}{4}\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 3\varphi + \sin\varphi =$$
$$= \frac{3}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 3\varphi + \frac{1}{4}\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 3\varphi.$$

Для того чтобы получить решение задачи, необходимо каждое n-е слагаемой умножить на $\left(\frac{r}{2}\right)^n$:

$$u(r,\varphi) = \frac{r}{2}\left(\frac{3}{2}\cos\varphi + \frac{1}{4}\sin\varphi\right) + \left(\frac{r}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\cos 3\varphi + \frac{1}{4}\sin 3\varphi\right).$$

Ответ. $u(r,\varphi) = \frac{r}{2}\left(\frac{3}{2}\cos\varphi + \frac{1}{4}\sin\varphi\right) + \left(\frac{r}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\cos 3\varphi + \frac{1}{4}\sin 3\varphi\right).$

Пример 3.2 (пример выполнения задачи 22).

Решить задачу Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad r > 3,$$

$$u|_{r=3} = 4\cos^3\varphi - 4\sin^3\varphi + 3\sin\varphi + \cos\varphi + 2.$$

Это внешняя задача Дирихле. Представим граничную функцию в виде

$$u|_{r=3} = 4\cos^3\varphi - 4\sin^3\varphi + 3\sin\varphi + \cos\varphi + 2 =$$
$$= 4\left(\frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 3\varphi\right) - 4\left(\frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi\right) +$$
$$+ 3\sin\varphi + \cos\varphi + 2 = 2 + 2\cos\varphi + \cos 3\varphi + \sin 3\varphi.$$

Для того чтобы получить решение задачи, необходимо каждое n-е слагаемое умножить на $\left(\frac{3}{r}\right)^n$:

$$u(r,\varphi) = 2 + \frac{3}{r}\cdot 2\cos\varphi + \left(\frac{3}{r}\right)^3(\cos 3\varphi + \sin 3\varphi).$$

Ответ. $u(r,\varphi) = 2 + \frac{6}{r}\cos\varphi + \left(\frac{3}{r}\right)^3(\cos 3\varphi + \sin 3\varphi).$

3.2. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце и круговом секторе

Если область Ω — кольцо $\{(r,\varphi)|R_1 < r < R_2, 0 < \varphi < 2\pi\}$, то она не содержит ни бесконечно удаленную точку, ни точку $(0,0)$. Решение внутренней задачи Дирихле в этом случае ищется по формуле (3.13) предыдущего параграфа, произвольные постоянные в которой определяются из граничных условий задачи.

Пример 3.3.

Решить задачу Дирихле в кольце

$$\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2,$$
$$u\big|_{r=1} = 1 + \cos^2\varphi,$$
$$u\big|_{r=2} = \sin^2\varphi.$$

Решение уравнения Лапласа дается формулой (3.13)

$$u(r,\varphi) = C_0 \ln r + D_0 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left((A_n r^{-n} + C_n r^n) \cos n\varphi + (B_n r^{-n} + D_n r^n) \sin n\varphi \right).$$

Определим A_n, B_n, C_n, D_n так, чтобы выполнялись граничные условия. Сначала преобразуем граничные функции

$$1 + \cos^2\varphi = 1 + \frac{1+\cos 2\varphi}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi,$$

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi.$$

Подставив (3.13) в граничные условия, получим

$$u|_{r=1} = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((A_n + C_n)\cos n\varphi + (B_n + D_n)\sin n\varphi\right) =$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi,$$

$$u|_{r=2} = C_0 \ln 2 + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n 2^{-n} + C_n 2^n)\cos n\varphi +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(B_n 2^{-n} + D_n 2^n)\sin n\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi.$$

Сравнивая коэффициенты при $\sin nx$ и $\cos nx$, для определения A_n, D_n, B_n, C_n получим системы

$$n = 0: \quad \begin{cases} D_0 = \frac{3}{2}, \\ C_0 \ln 2 + D_0 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$n = 2: \quad \begin{cases} A_2 + C_2 = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4}A_2 + 4C_2 = -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} B_2 + D_2 = 0, \\ \frac{1}{4}B_2 + 4D_2 = 0. \end{cases}$$

$$n \neq 0, \ \ n \neq 2: \quad \begin{cases} A_n + C_n = 0, \\ 2^{-n}A_n + 2^n C_n = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} B_n + D_n = 0, \\ 2^{-n}B_n + 2^n D_n = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$D_0 = \frac{3}{2}, \quad C_0 = -\frac{1}{\ln 2}, \quad A_2 = \frac{2}{3}, \quad C_2 = -\frac{1}{6}, \quad B_2 = 0, \quad D_2 = 0,$$
$$A_n = 0, \quad B_n = 0, \quad C_n = 0, \quad D_n = 0, \quad n = 1, 3, 4, \ldots .$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу (3.13), получим

$$u(r,\varphi) = -\frac{lnr}{ln2} + \frac{3}{2} + \left(\frac{2}{3r^2} - \frac{r^2}{6}\right).$$

Ответ. $u(r,\varphi) = -\frac{lnr}{ln2} + \frac{3}{2} + \left(\frac{2}{3r^2} - \frac{r^2}{6}\right)$.

Пример 3.4 (пример выполнения задачи 23).

Найти решение уравнения Лапласа в круговом секторе, на границе которого искомая функция удовлетворяет заданным граничным условиям.

Рассмотрим задачу Дирихле:

$$\begin{aligned}
&\Delta u = 0, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{3},\\
&u\big|_{r=1} = \sin 6\varphi,\\
&u\big|_{\varphi=0} = 0,\\
&u\big|_{\varphi=\pi/3} = 0.
\end{aligned}$$

Уравнение Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Решение задачи будем искать в виде

$$u(r,\varphi) = F(r)\Phi(\varphi).$$

Подставив эту функцию в уравнение Лапласа и разделив переменные, получим

$$\frac{r^2F'' + rF'}{F} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda^2.$$

Учитывая граничные условия, для функций $F(r)$ и $\Phi(r)$ получаем задачи:

1) для функции $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi'' + \lambda^2\Phi = 0,$$

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(\frac{\pi}{3}) = 0;$$

2) для функции $F(r)$:

$$r^2F'' + rF' - 9n^2F = 0,$$

$$|F(0)| < \infty.$$

Решаем задачу 1): общее решение уравнения имеет вид

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos\lambda\varphi + C_2 \sin\lambda\varphi.$$

Из граничных условий следует

$$\Phi(0) = C_1 = 0,$$

$$\Phi(\frac{\pi}{3}) = C_2 \sin\frac{\lambda\pi}{3} = 0.$$

Откуда

$$\frac{\lambda\pi}{3} = \pi n, \quad n = 1, 2, \dots\ ,$$

$$\lambda_n = 3n, \quad n = 1, 2, \dots\ .$$

Тогда

$$\Phi_n(\varphi) = C_2 \sin 3n\varphi, n = 1, 2, \dots\ .$$

Решим задачу 2).

Найдем функцию $F(r)$. Для нее при $\lambda = 3n$ получим уравнение Эйлера

$$r^2F'' + rF' - 9n^2F = 0.$$

Его решение будем искать в виде

$$F = r^\alpha,$$

где α — параметр, подлежащий определению. Подставив эту функцию в уравнение, получим

$$\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}r^2 + \alpha r^\alpha - 9n^2r^\alpha = 0,$$

$$r^{\alpha}(\alpha^2 - \alpha + \alpha - 9n^2) = 0.$$

Откуда $\alpha = \pm 3n$. Тогда имеем два линейно независимых решения рассматриваемого уравнения:

$$F_1 = r^{3n}, \qquad F_2 = r^{-3n}.$$

Следовательно, общее решение этого уравнения имеет вид

$$F_n(r) = C_n r^{3n} + D_n r^{-3n}.$$

Случай $n = 0$ в этой задаче рассматривать не нужно, поскольку при $n = 0 \quad \Phi(\varphi) = 0$, а следовательно, и $u(r, \varphi) = 0$. Но $u(r, \varphi) = 0$ не является решением рассматриваемой задачи. Учитывая условие ограниченности при $r = 0$, необходимо положить $D_n = 0$.

Составим формальный ряд

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^{3n}) C_2 \sin 3n\varphi.$$

Или

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^{3n}) \sin 3n\varphi,$$

где введено обозначение $A_n = C_n \cdot C_2$.

Определим A_n так, чтобы выполнялось первое граничное условие задачи:

$$u|_{r=1} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin 3n\varphi = \sin 6\varphi.$$

Следовательно, сравнивая коэффициенты при одинаковых $\sin 3n\varphi$, найдем

$$A_2 = 1, \quad A_n = 0, \quad n \neq 2.$$

Подставив найденные коэффициенты в функцию $u(r,\varphi)$, получим решение задачи:

$$u(r,\varphi) = r^6 \sin 6\varphi.$$

Ответ. $u(r,\varphi) = r^6 \sin 6\varphi$.

3.3. Индивидуальные задания к главе 3

Задача 22

Найти функцию, гармоническую в круге Ω_R (или вне круга), непрерывную вплоть до границы S_R, удовлетворяющую заданному граничному условию:

22.1. $\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad 0 \le r < 2, 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u|_{r=2} = 4\cos^3\varphi + 4\sin^3\varphi + 3\sin\varphi + 3. \end{array}$

22.2. $\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad r > 1, 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u|_{r=1} = 5\cos^3\varphi + \sin^3\varphi + \sin\varphi - \cos\varphi. \end{array}$

22.3. $\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1, 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u|_{r=1} = \cos^3\varphi - 4\sin^3\varphi + 2\sin\varphi - 6. \end{array}$

22.4. $\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad r > 3, 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u|_{r=3} = 4\sin^3\varphi - 3\sin\varphi + \cos\varphi. \end{array}$

22.5. $\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad 0 \le r < 4, 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u|_{r=4} = 8\cos^3\varphi - 3\sin^3\varphi + \sin\varphi - 2\cos\varphi. \end{array}$

22.6. $\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad r > 1, 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u|_{r=1} = 5\cos^3\varphi + \sin^3\varphi + \sin\varphi - \cos\varphi. \end{array}$

22.7. $\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad 0 \le r < 2, 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u|_{r=2} = 3\cos^3\varphi - 7\sin^3\varphi - 4\cos\varphi + 5. \end{array}$

22.8. $\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad r > 3, 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u|_{r=3} = 2\cos^3\varphi + 5\sin^3\varphi - \sin\varphi - 3\cos\varphi + 2. \end{array}$

22.9. $\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad 0 \le r < 4, 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u|_{r=4} = 6\sin^3\varphi + 3\sin\varphi - 5\cos\varphi + 1. \end{array}$

22.10. $\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad r > 1, 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u|_{r=1} = \cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi + 7\sin\varphi - 3. \end{array}$

22.11. $\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad 0 \le r < 2, 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u|_{r=2} = \cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi + 9\sin\varphi - \cos\varphi. \end{array}$

22.12. $\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad r > 3, 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u|_{r=3} = 4\cos^3\varphi + 3\sin^3\varphi + \sin\varphi - 2\cos\varphi. \end{array}$

22.13. $\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad 0 \le r < 4, 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u|_{r=4} = 2\cos^3\varphi + \sin^3\varphi + 3\sin\varphi + \cos\varphi - 3. \end{array}$

22.14. $\begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad r > 1, 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u|_{r=1} = 3\cos^3\varphi + 5\sin^3\varphi + \sin\varphi + 1. \end{array}$

22.15. $\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 2, 0 \le \varphi < 2\pi,$
$u|_{r=2} = 9\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi + \cos\varphi + 4.$

22.16. $\Delta u = 0, \quad r > 1, 0 \le \varphi < 2\pi,$
$u|_{r=1} = 2\cos^3\varphi + 3\sin^3\varphi + \sin\varphi.$

22.17. $\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 4, 0 \le \varphi < 2\pi,$
$u|_{r=4} = -12\sin^3\varphi + \sin\varphi + 6\cos\varphi - 1.$

22.18. $\Delta u = 0, \quad r > 3, 0 \le \varphi < 2\pi,$
$u|_{r=3} = 7\cos^3\varphi - 3\sin^3\varphi + \cos\varphi.$

22.19. $\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 2, 0 \le \varphi < 2\pi,$
$u|_{r=2} = 2\cos^3\varphi + 4\sin^3\varphi - 3.$

22.20. $\Delta u = 0, \quad r > 1, 0 \le \varphi < 2\pi,$
$u|_{r=1} = 3\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi + \sin\varphi + 3\cos\varphi.$

22.21. $\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 4, 0 \le \varphi < 2\pi,$
$u|_{r=4} = 2\cos^3\varphi + 3\sin^3\varphi + \sin\varphi - \cos\varphi.$

22.22. $\Delta u = 0, \quad r > 3, 0 \le \varphi < 2\pi,$
$u|_{r=3} = 5\sin^3\varphi + 2\sin\varphi + 3\cos\varphi.$

22.23. $\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 2, 0 \le \varphi < 2\pi,$
$u|_{r=2} = 3\cos^3\varphi + 7\sin^3\varphi + \cos\varphi - 3.$

22.24. $\Delta u = 0, \quad r > 3, 0 \le \varphi < 2\pi,$
$u|_{r=3} = \sin^3\varphi + 4\sin\varphi + 3\cos\varphi - 5.$

22.25. $$\begin{aligned}&\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 4, 0 \le \varphi < 2\pi,\\ &u\big|_{r=4} = \cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi + \cos\varphi.\end{aligned}$$

Задача 23

Найти решение уравнения Лапласа в круговом секторе, на границе которого искомая функция удовлетворяет заданным условиям:

23.1. $$\begin{aligned}&\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{3},\\ &u\big|_{r=1} = 2\sin 3\varphi,\\ &u\big|_{\varphi=0} = 0, \quad u\big|_{\varphi=\pi/3} = 0.\end{aligned}$$

23.2. $$\begin{aligned}&\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \pi,\\ &u\big|_{r=1} = 2\cos 2\varphi - \cos\varphi,\\ &u_\varphi\big|_{\varphi=0} = 0, \quad u_\varphi\big|_{\varphi=\pi} = 0.\end{aligned}$$

23.3. $$\begin{aligned}&\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{6},\\ &u\big|_{r=1} = 3\cos 15\varphi,\\ &u_\varphi\big|_{\varphi=0} = 0, \quad u\big|_{\varphi=\pi/6} = 0.\end{aligned}$$

23.4. $$\begin{aligned}&\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{4},\\ &u\big|_{r=1} = 13\sin 12\varphi,\\ &u\big|_{\varphi=0} = 0, \quad u_\varphi\big|_{\varphi=\pi/4} = 0.\end{aligned}$$

23.5. $$\begin{aligned}&\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{2\pi}{3},\\ &u\big|_{r=1} = 8\sin 3\varphi,\\ &u\big|_{\varphi=0} = 0, \quad u\big|_{\varphi=2\pi/3} = 0.\end{aligned}$$

23.6. $$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{7\pi}{6}, \\ &u|_{r=1} = 6\cos 6\varphi, \\ &u_\varphi|_{\varphi=0} = 0, \quad u_\varphi|_{\varphi=7\pi/6} = 0. \end{aligned}$$

23.7. $$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{4}, \\ &u|_{r=1} = 5\cos 10\varphi, \\ &u_\varphi|_{\varphi=0} = 0, \quad u|_{\varphi=\pi/4} = 0. \end{aligned}$$

23.8. $$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{2}, \\ &u|_{r=3} = 12\sin 7\varphi, \\ &u|_{\varphi=0} = 0, \quad u_\varphi|_{\varphi=\pi/2} = 0. \end{aligned}$$

23.9. $$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{3\pi}{4}, \\ &u|_{r=1} = 6\sin 4\varphi, \\ &u|_{\varphi=0} = 0, \quad u|_{\varphi=3\pi/4} = 0. \end{aligned}$$

23.10. $$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{5\pi}{4}, \\ &u|_{r=1} = 3\cos 4\varphi, \\ &u_\varphi|_{\varphi=0} = 0, \quad u_\varphi|_{\varphi=5\pi/4} = 0. \end{aligned}$$

23.11. $$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{3\pi}{2}, \\ &u|_{r=1} = 12\sin 3\varphi, \\ &u|_{\varphi=0} = 0, \quad u_\varphi|_{\varphi=3\pi/2} = 0. \end{aligned}$$

23.12. $$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{2}, \\ &u|_{r=1} = 7\cos 5\varphi, \\ &u_\varphi|_{\varphi=0} = 0, \quad u|_{\varphi=\pi/2} = 0. \end{aligned}$$

23.13. $$\begin{aligned}&\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{5\pi}{6},\\ &u|_{r=1} = 13\sin 6\varphi,\\ &u|_{\varphi=0} = 0, \quad u|_{\varphi=5\pi/6} = 0.\end{aligned}$$

23.14. $$\begin{aligned}&\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{4\pi}{3},\\ &u|_{r=1} = 17\cos 3\varphi,\\ &u_\varphi|_{\varphi=0} = 0, \quad u_\varphi|_{\varphi=4\pi/3} = 0.\end{aligned}$$

23.15. $$\begin{aligned}&\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{3\pi}{2},\\ &u|_{r=1} = 9\cos\varphi,\\ &u_\varphi|_{\varphi=0} = 0, \quad u|_{\varphi=3\pi/2} = 0.\end{aligned}$$

23.16. $$\begin{aligned}&\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{6},\\ &u|_{r=1} = 3\sin 15\varphi,\\ &u|_{\varphi=0} = 0, \quad u_\varphi|_{\varphi=\pi/6} = 0.\end{aligned}$$

23.17. $$\begin{aligned}&\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{3},\\ &u|_{r=1} = 17\sin 9\varphi,\\ &u|_{\varphi=0} = 0, \quad u|_{\varphi=\pi/3} = 0.\end{aligned}$$

23.18. $$\begin{aligned}&\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{6},\\ &u|_{r=1} = 3\cos 21\varphi,\\ &u_\varphi|_{\varphi=0} = 0, \quad u|_{\varphi=\pi/6} = 0.\end{aligned}$$

23.19. $$\begin{aligned}&\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \pi,\\ &u|_{r=1} = 18\cos 4\varphi,\\ &u_\varphi|_{\varphi=0} = 0, \quad u_\varphi|_{\varphi=\pi} = 0.\end{aligned}$$

23.20. $$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{6}, \\ &u|_{r=1} = 20 \sin 15\varphi, \\ &u|_{\varphi=0} = 0, \quad u_\varphi|_{\varphi=\pi/6} = 0. \end{aligned}$$

23.21. $$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{2\pi}{3}, \\ &u|_{r=1} = 22 \sin 6\varphi + \sin\varphi - \cos\varphi, \\ &u|_{\varphi=0} = 0, \quad u|_{\varphi=2\pi/3} = 0. \end{aligned}$$

23.22. $$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{3}, \\ &u|_{r=1} = 22 \cos 6\varphi, \\ &u_\varphi|_{\varphi=0} = 0, \quad u_\varphi|_{\varphi=\pi/3} = 0. \end{aligned}$$

23.23. $$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{4}, \\ &u|_{r=1} = 21 \cos 14\varphi, \\ &u_\varphi|_{\varphi=0} = 0, \quad u|_{\varphi=\pi/4} = 0. \end{aligned}$$

23.24. $$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{4}, \\ &u|_{r=1} = 14 \sin 10\varphi, \\ &u|_{\varphi=0} = 0, \quad u_\varphi|_{\varphi=\pi/4} = 0. \end{aligned}$$

23.25. $$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ 0 < \varphi < \pi, \\ &u|_{r=1} = 25 \sin 3\varphi, \\ &u|_{\varphi=0} = 0, \quad u|_{\varphi=\pi} = 0. \end{aligned}$$

Заключение

Данное пособие содержит материалы для упражнений по курсу «Уравнения математической физики». В нем приведены не все темы, изучаемые в этом курсе. В первой части методического пособия содержатся теоретические материалы и разбираются примеры по темам: классификация линейных и нелинейных уравнений с частными производными второго порядка, классификация систем линейных уравнений, приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя и тремя независимыми переменными, задача Коши.

Вторая часть посвящена методу Фурье, она включает теоретические материалы и примеры по темам: смешанные задачи для уравнений гиперболического и параболического типов, краевые задачи для уравнения Лапласа в круге и круговом секторе.

Помимо задач, взятых из известных задачников, в пособие включены 250 задач, составленных автором для индивидуальной работы студентов.

Автор надеется, что данное пособие будет полезно преподавателям и студентам, изучающим курсы «Уравнения математической физики» и «Уравнения с частными производными».

Рекомендуемая литература

1. Алиев Р.Г. Сборник задач по уравнениям в частных производных/ Р.Г. Алиев. –М. : Наука, 2006. –128 с.

2. Бицадзе А. В. Сборник задач по уравнениям математической физики/ А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко. –М. : Наука, 1985. –222 с.

3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. –М. : Наука,1988. –777 с.

4. Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики/ В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, А.А. Вашарин, Х.Х. Каримов, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин.–М. : Наука,1988. –288 с.

5. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. –М. : Высшая школа, 1970.–710 с.

6. Курант Р. Уравнения с частными производными: Пер.с англ. / Р. Курант. –М. : Мир, 1964.–830 с.

7. Мартинсон Л.К. Дифференциальные уравнения математической физики/ Л.К. Мартинсон, Ю.И.Малов. –М.Изд - во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 1996. –364 с.

8. Михлин С.Г. Курс математической физики/ С.Г. Михлин. –М. : Наука, 1968. –576 с.

9. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский.–М. : Наука, 1999. –742 с.