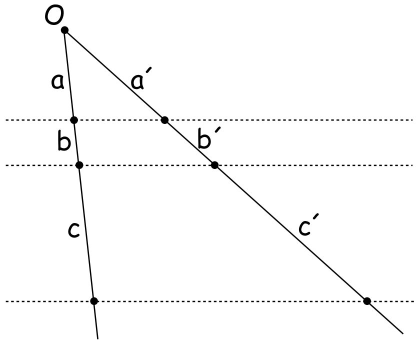
Teorema de Tales

Los segmentos producidos en dos rectas que se cortan por un haz de rectas paralelas son proporcionales.

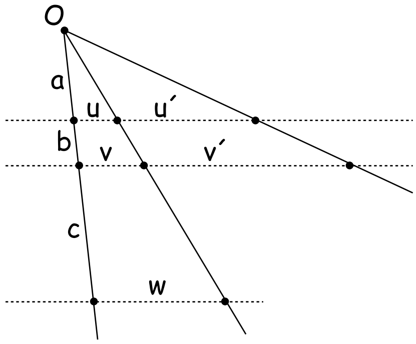


$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = ... = \text{constante}$$

Consecuencias del teorema de Tales

Observa que, además de las relaciones establecidas por el teorema de Tales, también se pueden expresar otras relaciones entre segmentos de las dos rectas que se cortan:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \qquad \frac{a'}{c'} = \frac{a}{c} \qquad \frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}$$



También se producen relaciones de proporcionalidad entre segmentos de las rectas que se cortan y segmentos producidos en las rectas paralelas.

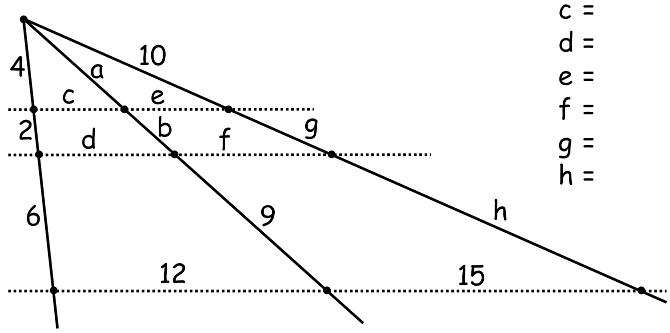
$$\frac{a}{u} = \frac{a+b}{v} = \frac{a+b+c}{w} = ... = \text{cte.}$$

Por último, un haz de rectas que se cortan en un punto O, producen en dos rectas paralelas segmentos proporcionales:

$$\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} = ... = \text{constante}$$

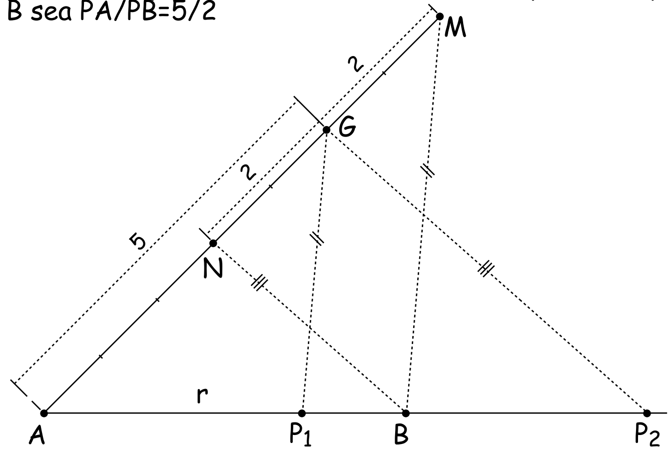
Si has entendido las relaciones anteriores seguro que, a la vista de la figura, eres capaz de obtener mentalmente el valor de los segmentos que quedan por determinar:

a =
b =
c =
d =
e =
f =
g =
h =



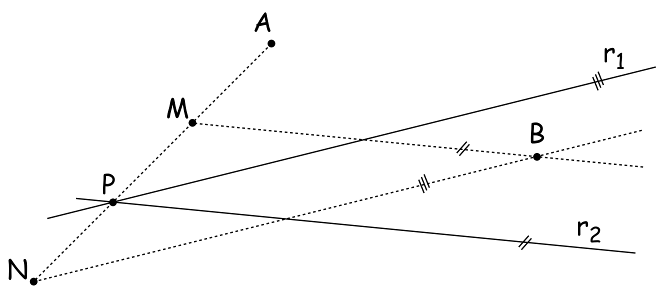
Solución: a=6; b=3; c=4; d=6; e=5; f=7,5; g=5; h=15

Dados A y B, obtener los puntos P de la recta que pasa por ellos cuya relación de distancias a los puntos A y B sea PA/PB=5/2



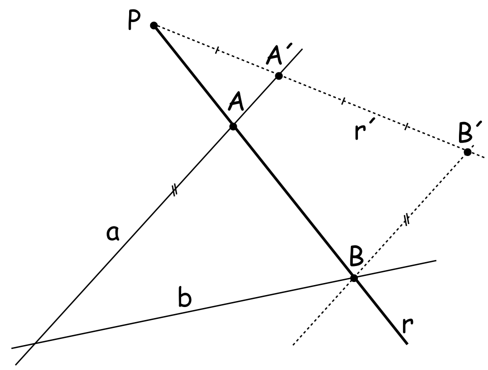
Situamos la relación en una recta auxiliar que pase por A, obteniendo G, M y N. Las paralelas a las rectas MB y NB por G determinan los puntos P buscados.

Trazar, por el punto P, las rectas r que pasen a doble distancia del punto A que del punto B.



En la recta que pasa por A y por P obtenemos los puntos M y N tales que AP=2MP y AP=2PN.
Para que se mantenga la relación de distancias, las dos soluciones tendrán que ser paralelas a las rectas resultado de unir los puntos M y N con el punto B.

Trazar, por el punto P, la recta r que corte a las rectas a y b en puntos A y B, respectivamente, de tal manera que se cumpla la relación PA/PB=2/5.

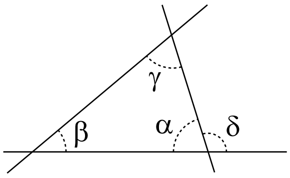


En una recta auxiliar r´ que pase por P situamos la relación PA´/PB´= 2/5, estando A´ en a, y obteniendo B´. En punto B tendrá que encontrarse en la paralela a la recta a por B´ para que se mantenga la relación.

Recuerda

Ángulos complementarios son los que suman 90°. Ángulos suplementarios son los que suman 180°.

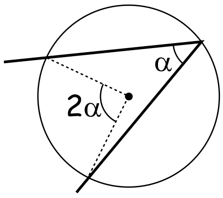
En tres rectas que se cortan los ángulos interiores suman 180° y un ángulo exterior mide la suma de los ángulos interiores no adyacentes.



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

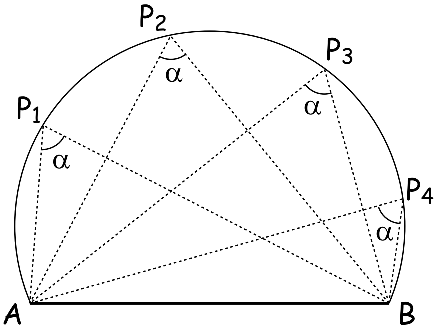
$\delta = \beta + \gamma$

Ángulo central es el que tiene su vértice en el centro de una circunferencia. Ángulo inscrito es el que tiene su vértice en un punto de la circunferencia.
El valor de un ángulo inscrito es la mitad del ángulo central que le corresponde.



Arco capaz

Se llama arco capaz de un segmento AB para un ángulo α dado al lugar geométrico de los puntos P desde los que se observa el segmento AB, fijo, bajo el ángulo α.

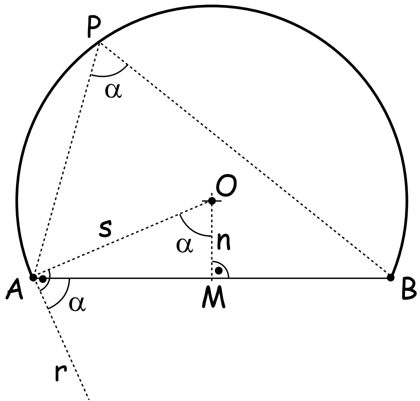


El arco capaz es un arco de circunferencia que tiene por extremos los extremos del segmento.

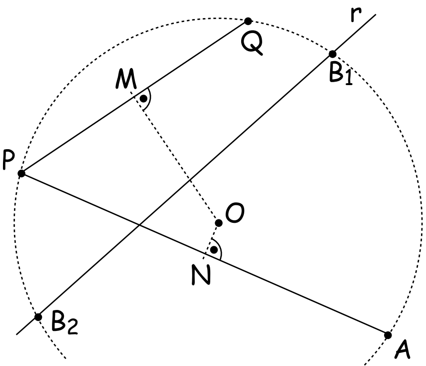
Construcción de un arco capaz conocido el segmento AB y el ángulo α.

1.- Colocamos el ángulo como vemos en la figura, apoyándonos en el segmento AB y hacia el otro lado del arco que vamos a construir. Obtenemos r.
2.- Trazamos la recta s perpendicular a r por A.
3.- Trazamos la recta n, mediatriz del segmento.
4.- La intersección de s con la mediatriz es el centro del arco capaz.

Se demuestra que la relación se cumple puesto que para cualquier punto P del arco, el ángulo APB resulta inscrito en la circunferencia y su valor es la mitad del ángulo central AOB que mide precisamente 2α.



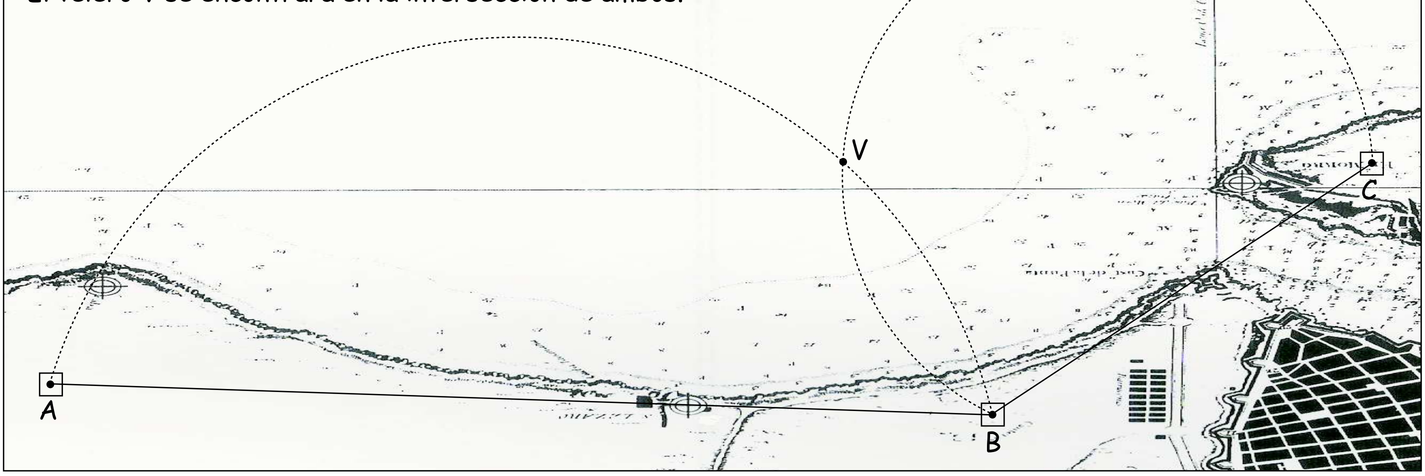
Dados A, P, Q y r, obtener los puntos B de la recta r tal que los ángulos APB y AQB sean iguales.



El punto B será extremo de un arco capaz del que no conocemos ni el segmento ni el ángulo pero que podemos construir pues los tres puntos dados pertenecen a él.

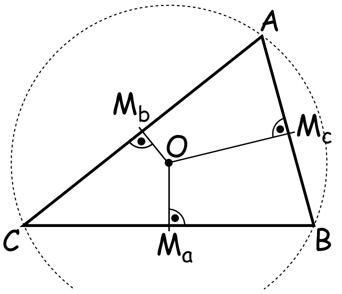
Problema de Pothenot o de la trisección inversa: Determinar la posición del velero desde el que se observan los puntos A, B y C de la costa bajo los siguientes ángulos: AVB = 105°; BVC = 60°

Se resuelve construyendo dos arcos capaces de 105° y 60° para los segmentos AB y BC respectivamente. El velero V se encontrará en la intersección de ambos.



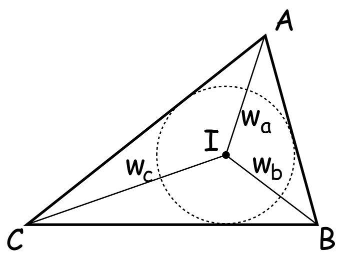
Rectas y centros

Mediatrices son las perpendiculares a los lados por sus puntos medios.



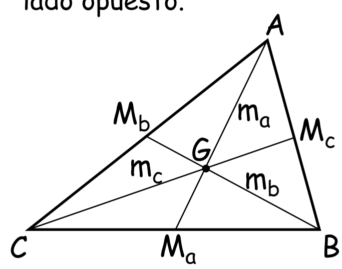
Circuncentro
Es el centro de la circunferencia circunscrita. Está determinado por las mediatrices.

Bisectrices son las rectas que dividen a los ángulos en dos ángulos iguales.



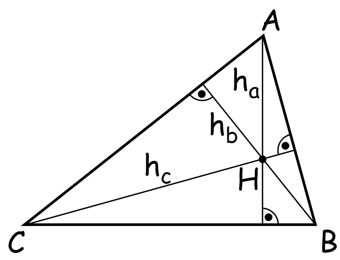
Incentro
Es el centro de la circunferencia inscrita. Está determinado por las bisectrices.

Medianas son las rectas que pasan por un vértice y por el punto medio del lado opuesto.



Baricentro
Es el punto donde se cortan las medianas. Se encuentra a 1/3 del pié de cada mediana y a 2/3 del vértice.

Alturas son las perpendiculares a los lados por el vértice opuesto.

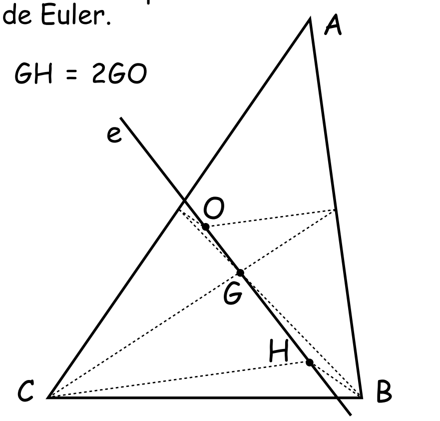


Ortocentro
Es el punto donde se cortan las alturas.

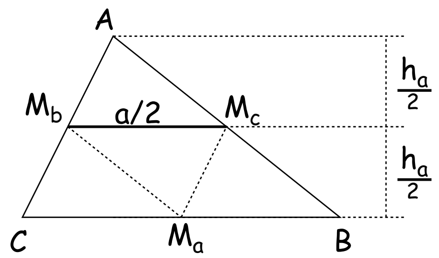
Recta de Euler

El baricentro está alineado con el ortocentro y el circuncentro, y a doble distancia del primero que del segundo. La recta que pasa por estos tres puntos se llama recta de Euler.

GH = 2GO



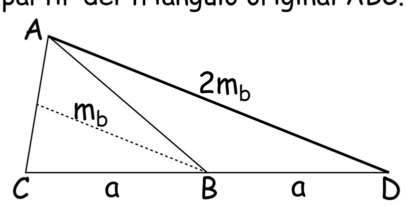
Puntos medios

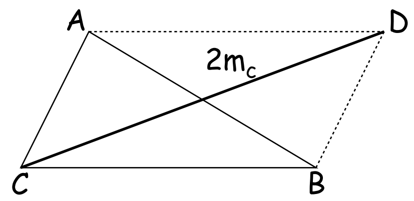


Las rectas que pasan por dos puntos medios son paralelas al tercer lado y pasan a la mitad de su altura.
Los segmentos que tienen por extremos puntos medios miden la mitad del tercero de los lados.

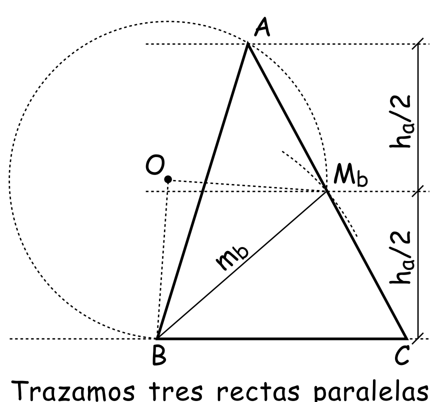
Desdoblamientos

Observa las relaciones que producen las medianas al realizar desdoblamientos a partir del triángulo original ABC.



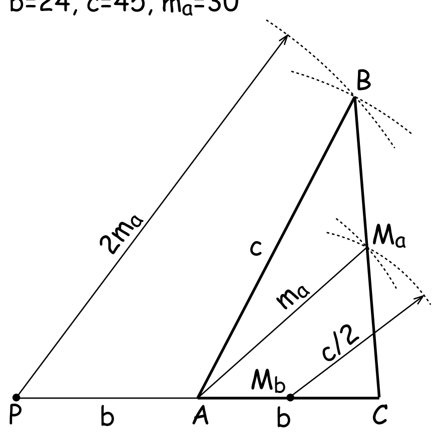


Construir un triángulo conocidos:
A=45°, h_a=39, m_b=30



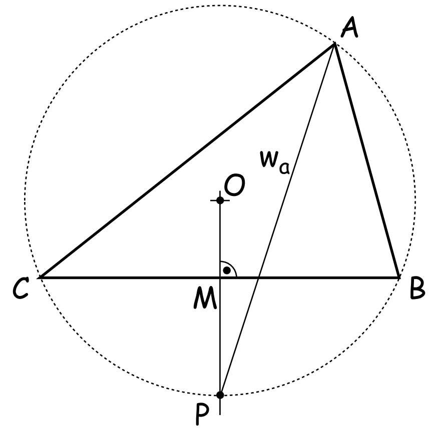
Trazamos tres rectas paralelas separadas la mitad de la altura. Tomamos un punto B y trazamos arco de radio la mediana obteniendo M_b. Obtenemos A con un arco capaz de 45° para m_b.

Construir un triángulo conocidos:
b=24, c=45, m_a=30



Colocado un lado b, podemos obtener M_a a partir del punto medio M_b o bien podemos obtener B a partir del punto doble P.

Bisectriz y mediatriz

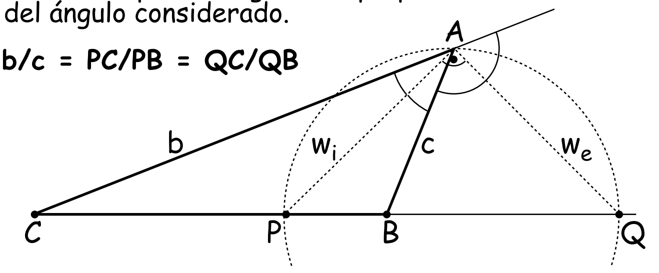


La bisectriz de un ángulo y la mediatriz del lado opuesto se cortan en un punto P de la circunferencia circunscrita.

Teorema de la bisectriz

Las bisectrices interior y exterior de un ángulo producen en el lado opuesto segmentos proporcionales a los lados del ángulo considerado.

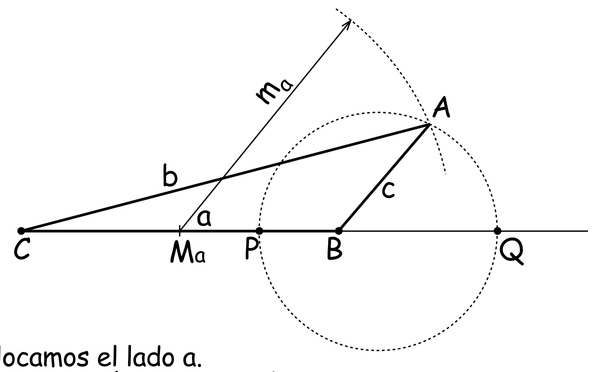
b/c = PC/PB = QC/QB



Un lugar geométrico importante

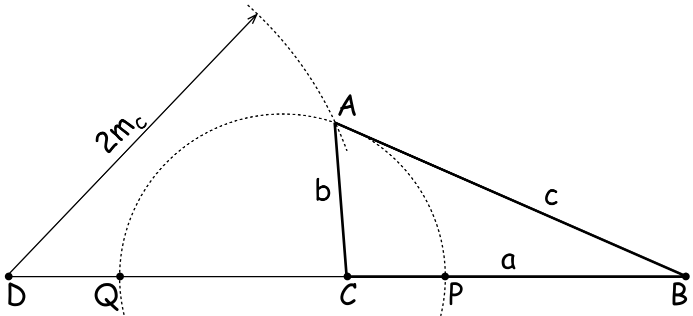
Al formar las bisectrices interior y exterior un ángulo de 90º se puede afirmar que el lugar geométrico de los puntos (como el A) cuya razón de distancias a dos puntos fijos (C y B) es conocida (b/c), es una circunferencia de diámetro PQ, puntos que mantienen la misma relación de distancias y se encuentran en la recta que pasa por dichos puntos fijos.

Construir un triángulo conocidos:
a = 42 mm, m_a = 36 mm, c/b = 1/3



Colocamos el lado a.
A continuación obtenemos los puntos P y Q que mantienen la misma relación de distancias (1/3) respecto de los extremos del lado a. Trazamos la circunferencia de diámetro PQ, en ella estará el vértice A.
Completamos el triángulo trazando arco de centro M_a y radio m_a.

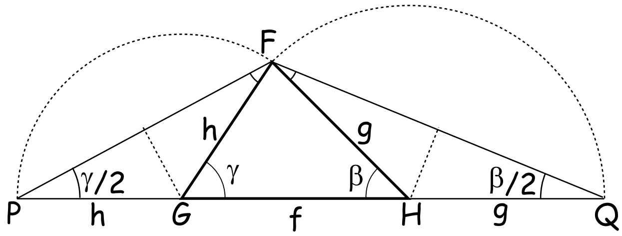
Construir un triángulo conocidos:
45 mm, mc = 24 mm, c/b = 5/2



Como en el caso anterior colocamos el lado a y obtenemos los puntos P y Q que ahora mantienen la relación de distancias 5/2 respecto de los extremos del lado a. Trazamos la circunferencia de diámetro PQ. Completamos en este caso el triángulo haciendo uso del punto doble D: trazando el arco de centro D y radio dos veces la mediana m_c.

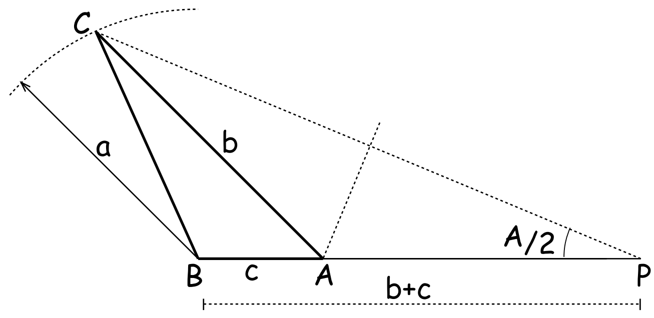
Suma de lados

Si en un triángulo FGH abatimos sobre uno de los lados los otros dos, se producen las siguientes relaciones que habrá que considerar cuando de un triángulo se conozca la suma de dos o de tres lados.



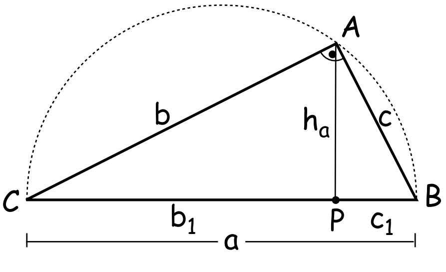
Los triángulos FPG y FQH son isósceles.
Los ángulos en P y en Q son la mitad de los ángulos en G y en H respectivamente.
Los vértices G y H se encuentran en las mediatrices de los segmentos FP y FQ.

Construir un triángulo conocidos:
A = 45º, a = 33 mm, b+c = 59 mm



Colocamos la suma de lados en una recta, el segmento BP. En el extremo P colocamos la mitad del ángulo A y con centro en el extremo B trazamos arco de radio a, obteniendo el vértice C. En la mediatriz de CP se encontrará el vértice A.
También podríamos haber colocado el lado a y construido un arco capaz para el ángulo A/2. Con centro B y radio b+c obtendríamos P y a partir de él, el triángulo.

Triángulos rectángulos



$h_a^2 = b_1c_1$

$b^2 = ab_1$

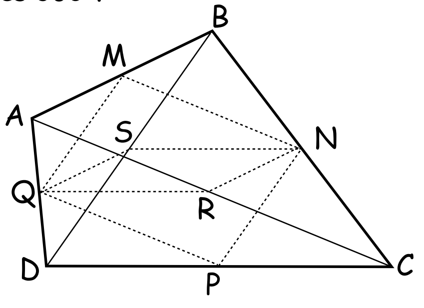
$c^2 = ac_1$

$a^2 = b^2+c^2$

Teorema de la altura: La altura trazada desde el ángulo recto es media proporcional entre los dos segmentos en que su pié divide a la hipotenusa.
Teorema del cateto: Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.
Teorema de Pitágoras: El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Cuadriláteros

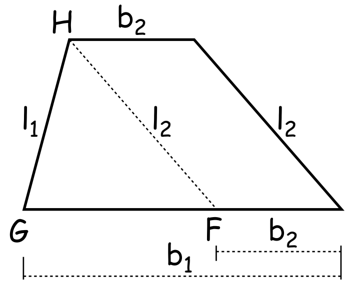
La suma de los ángulos interiores es 360°.

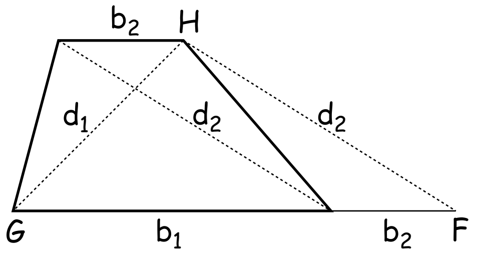


Las rectas que unen los puntos medios de los lados forman un paralelogramo.
Las rectas que unen los puntos medios de dos lados opuestos y los puntos medios de las diagonales forman un paralelogramo.

Trapecios

Si en un trapecio restamos a la base mayor la base menor obtenemos un triángulo FGH que permitirá construir el trapecio cuando se conozcan los cuatro lados.
Si sumamos las bases, el triángulo FGH permitirá construir el trapecio cuando se conozcan las dos bases y las dos diagonales.

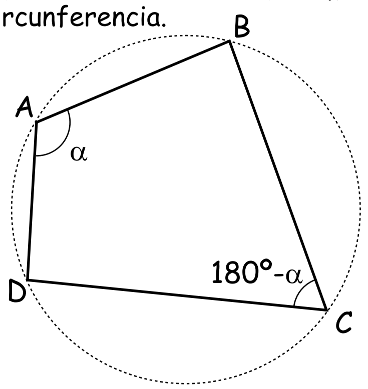




Además, a la vista de la segunda figura observamos que d_2 divide a d_1 en segmentos proporcionales a b_1 y b_2 por lo que se puede afirmar que las diagonales se dividen mutuamente en segmentos proporcionales a las bases.

Cuadrilátero inscriptible

Es el cuadrilátero que tiene sus cuatro vértices en una misma circunferencia.

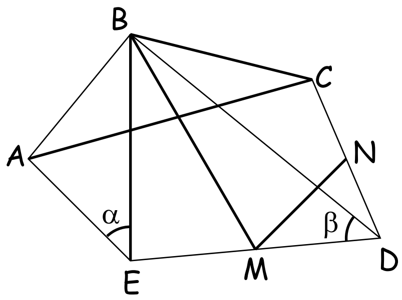


Sus cuatro ángulos son inscritos a la circunferencia y por lo tanto los ángulos opuestos son suplementarios.

Construcción de polígonos

Para construir un polígono de n lados se necesitan, en general, un mínimo de 2n-3 datos de magnitudes independientes entre sí.

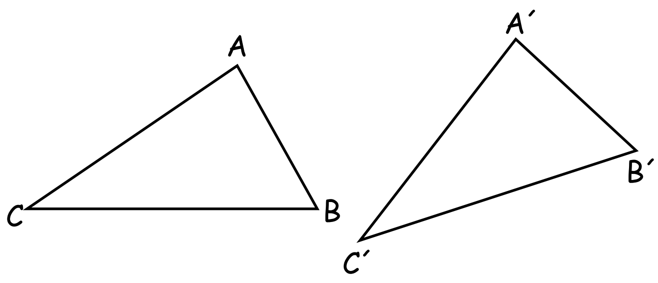
El procedimiento para la construcción de polígonos será obsevar los datos que se tienen y comenzar construyendo el triángulo del que se tiene más datos (mínimo tres). La construcción de uno de los triángulos supone disponer de más datos para el siguiente triángulo. La construcción sucesiva de triángulos conducirá a la construcción del polígono.



Así en el pentágono dado por su croquis comenzaríamos construyendo, mediante un arco capaz y un punto doble, el triángulo BDE, del que conocemos lado BE, ángulo opuesto β y mediana BM.
A continuación construiríamos el triángulo BCD sabiendo que EC=2MN.
Con facilidad obtendríamos el último vértice A.

Igualdad de polígonos

Recuerda que dos polígonos iguales tienen todos sus elementos, lados, ángulos y diagonales iguales y dispuestos del mismo modo.



Criterios de igualdad de triángulos

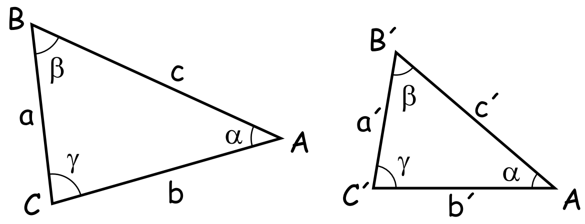
Dos triángulos son iguales si tienen:

I.- Dos ángulos iguales y un lado igual.
II.- Un ángulo igual y dos lados iguales.
III.- Los tres lados iguales.

Semejanza de polígonos

Recuerda que dos polígonos semejantes tienen todos sus ángulos ordenadamente iguales y los lados que los comprenden son proporcionales.

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = r \text{ (razón de semejanza)}$$



Criterios de semejanza de triángulos

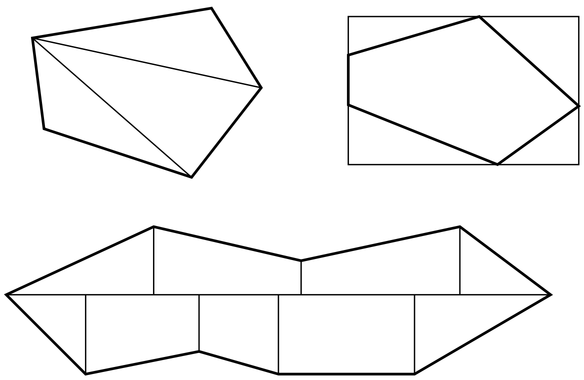
Dos triángulos son semejantes si tienen:

I.- Dos ángulos iguales.
II.- Un ángulo igual y dos lados proporcionales.
III.- Los tres lados proporcionales.

Polígonos equivalentes

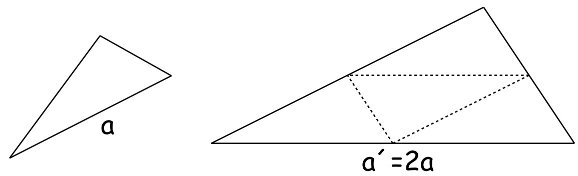
Área de un polígono irregular

Para obtener el área de un polígono irregular lo normal es descomponer en triángulos y sumar las areas de los triángulos. Sin embargo en algunos casos puede ser más práctico descomponer en trapecios o incluso inscribir el polígono en un paralelogramo. Observa las figuras:



Áreas polígonos semejantes

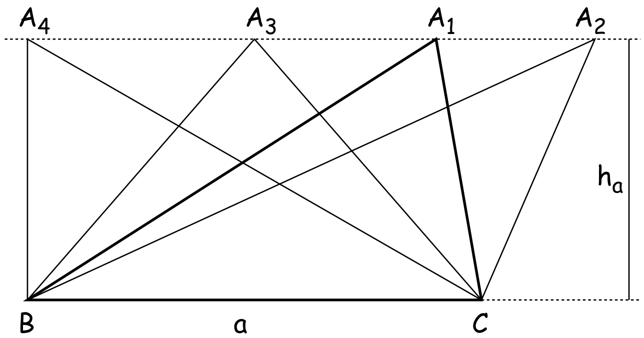
La relación entre las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza. Observa como ejemplo los dos triángulos de la figura, son semejantes de razón 2 y la relación entre las áreas es el cuadrado de 2, esto es 4.



Si queremos construir un polígono semejante a otro siendo conocida la relación entre las áreas, no tendremos más que obtener la razón de semejanza que será igual a la raiz cuadrada de dicha relación entre las áreas.

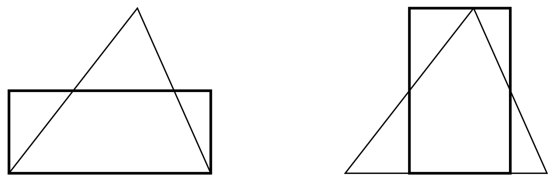
Transformaciones equivalentes

Dos polígonos son equivalentes si tienen la misma área. Un triángulo se puede transformar con facilidad en otro equivalente manteniendo un lado fijo y moviendo el vértice opuesto en la paralela a dicho lado.

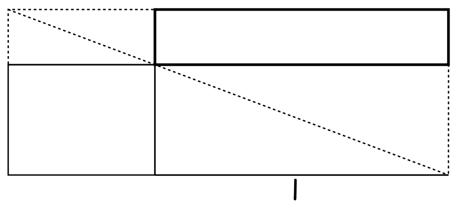


Puedes observar que los cuatro triángulos de la figura son equivalentes al tener todos la misma base a y la misma altura h_a.

Triángulo en rectángulo equivalente: manteniendo un lado y tomando la midad de su altura o bien manteniendo la altura y tomando la mitad de su lado:

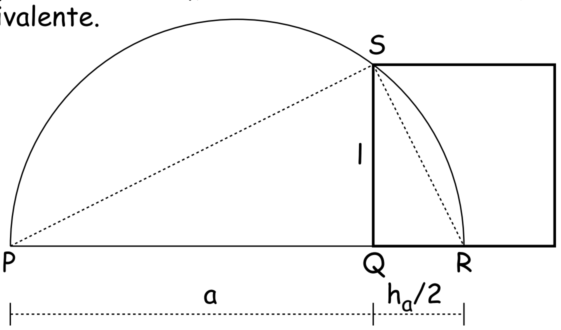


Rectángulo en otro equivalente de lado l conocido: colocando el lado l a continuación de uno de los lados del rectángulo dado y construyendo la siguiente figura:



Triángulo en un cuadrado equivalente

Con un lado a del triángulo y la mitad de su altura $h_a/2$ realizamos la siguiente construcción:
1 Semicircunferencia de diámetro $a+h_a/2$.
2 Perpendicular por Q.
3 El punto de corte de la perpendicular con la semicircunferencia determina el valor del lado del cuadrado equivalente.

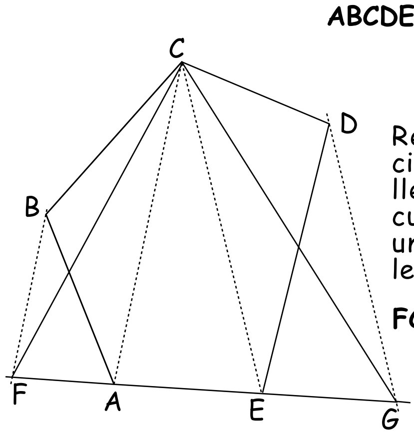


Efectivamente el triángulo obtenido PSR es rectángulo y por tanto se cumple el teorema de la altura.

Polígono de n lados en otro de n-1 lados

Descomponemos el polígono en un triángulo + otro polígono y transformamos el triángulo en otro equivalente prolongando un lado contiguo del polígono dado .

ABCDE = ABC+ACDE
↓
AFC+ACDE = **FCDE**

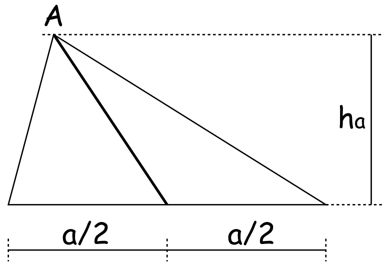


Repitiendo la operación siempre podemos llegar a transformar cualquier polígono en un triángulo equivalente:

FCDE = CDE+EFC
↓
CGE+EFC = **FCG**

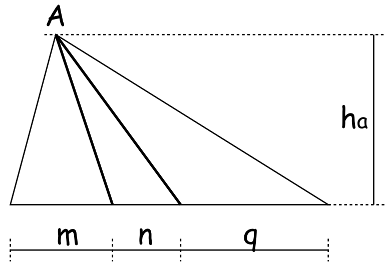
División de triángulos

En dos partes equivalentes mediante una recta que pasa por un vértice.



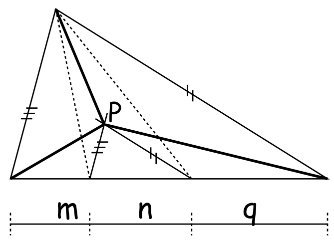
Las medianas dividen al triángulo en dos partes equivalentes.

En tres partes proporcionales a tres números m, n y q mediante rectas que pasan por un vértice.



Dividiendo el lado opuesto en partes proporcionales a m, n y q.

División de un triángulo en tres partes proporcionales a tres números m, n y q de modo que cada división tenga por base uno de los lados del triángulo.

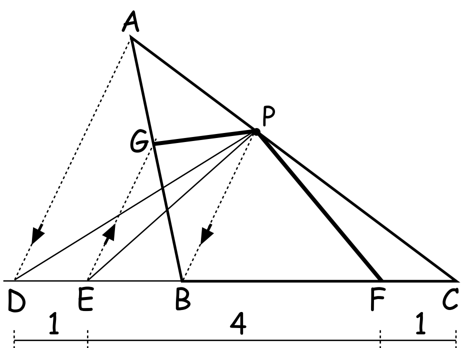


Dividiendo como en el caso anterior y luego transformando triángulos obtenemos el punto P.

División pasando por un punto P situado en uno de los lados

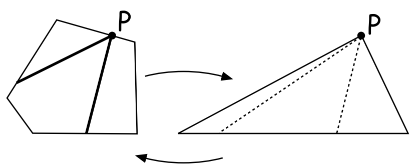
Ejemplo: Dividir el triángulo ABC en partes proporcionales a 1, 4, 1 mediante rectas que pasen por el punto P.

Transformamos el triángulo ABC en otro equivalente de vértice P, el PDC.
Dividimos el nuevo triángulo obteniendo las rectas PE y PF.
La recta PF es solución por ser común a los dos triángulos, el ABC y el PDC.
La recta PE no es común a los dos triángulos, necesitamos realizar una transformación en sentido contrario para darle la forma del triángulo original ABC.
Lo conseguimos trazando otra paralela por E para obtener G y con ello la segunda solución PG.



División de polígonos mediante rectas que pasan por un punto P situado en uno de los lados:

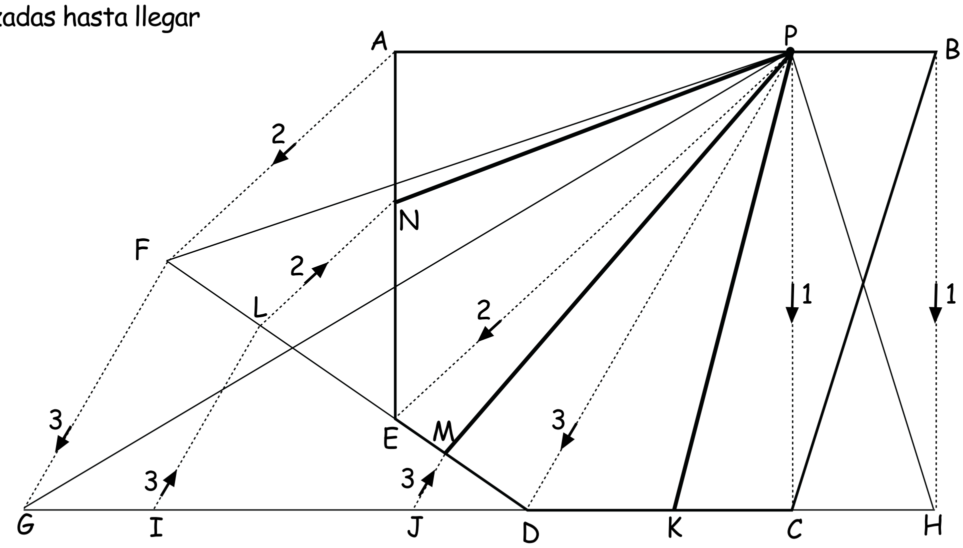
1 Transformamos el polígono en un triángulo equivalente de vértice P.
2 Dividimos el triángulo, cumpliendo las condiciones de área, mediante rectas que pasan por P.
3 Si es necesario volvemos a realizar transformaciones equivalentes en sentido contrario para devolver a las divisiones obtenidas en el triángulo la forma del polígono original.



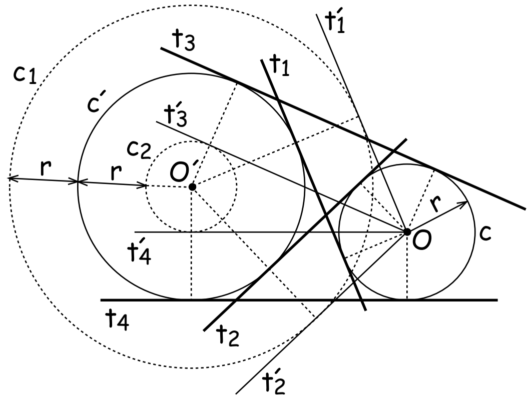
Dividir el polígono ABCDE en cuatro partes proporcionales a 1, 2, 2 y 2 mediante rectas que pasen por P.

Observa las transformaciones realizadas hasta llegar al triángulo PHG:
1- ABCDE en APHDE
2- APHDE en PHDF
3- PHDF en PHG

Ahora dividimos el lado HG en segmentos proporcionales a 1, 2, 2, 2 obteniendo los puntos I, J y K.
La recta KP del triángulo es común al polígono original luego es válida.
La división por J y por I se salen del polígono original y requieren la transformación 3 en sentido contrario para obtener M y L.
M ya es del polígono original luego MP es válida, sin embargo el punto L sigue siendo exterior y requiere la transformación 2 en sentido contrario para obtener N y con él la última recta NP.

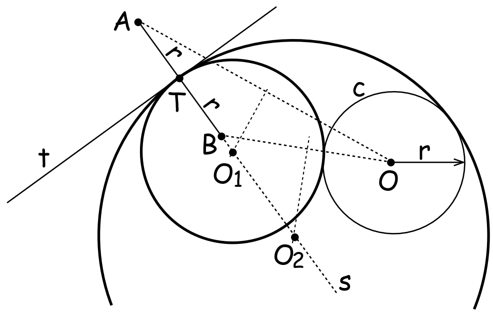


Rectas tangentes comunes a dos circunferencias c y c´



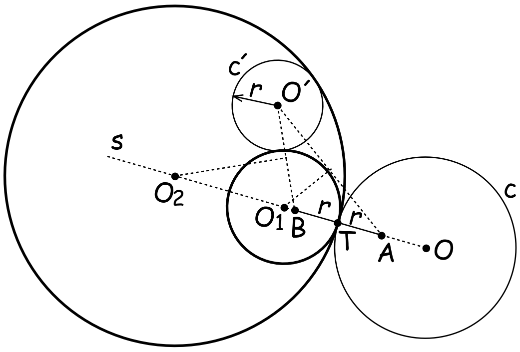
Trazamos dos circunferencias auxiliares c_1 y c_2 concéntricas a la c´ y de radio suma y resta de los radios.
Las rectas buscadas serán las paralelas a las tangentes desde O a las circunferencias auxiliares c_1 y c_2.

Circunferencias tangentes a una recta t en un punto T y a otra circunferencia c



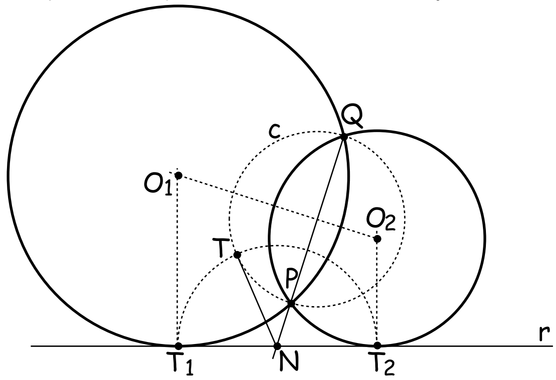
Tomamos el radio r de la circunferencia dada y lo situamos a partir de T en la recta s perpendicular a t, obteniendo los puntos A y B. Las intersecciones de la recta s con las mediatrices de los segmentos AO y BO serán los centros de las dos circunferencias solución.

Circunferencias tangentes a una circunferencia c en un punto T y a otra circunferencia c´



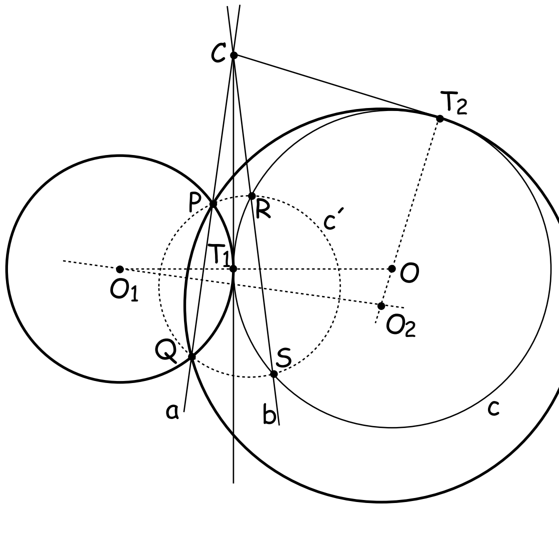
Tomamos el radio r de la circunferencia c´ y lo situamos a partir de T en la recta s (radio OT), obteniendo los puntos A y B. Las intersecciones de la recta s con las mediatrices de los segmentos AO´ y BO´ serán los centros de las dos circunferencias solución.

Circunferencias tangentes a una recta r y que pasan por dos puntos P y Q (Razonamiento: ejes radicales)



Procedimiento: Trazamos una circunferencia auxiliar c que pase por P y Q. Desde el punto N, intersección de r con la recta que pasa por P y Q, trazamos tangente a c, obteniendo T. Giramos el segmento tangente NT sobre r para obtener T_1 y T_2, puntos de tangencia de las circunferencias solución.

Circunferencias que pasan por dos puntos P y Q y son tangentes a otra circunferencia c



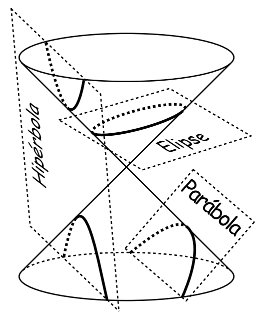
(Razonamiento: ejes radicales)

Procedimiento:
Trazamos una circunferencia auxiliar c´ que pase por P y por Q obteniendo los puntos de intersección con la circunferencia dada, R y S.
Trazamos las rectas a y b que pasan respectivamente por P y Q y por R y S. Obtenemos su intersección, el punto C.
Desde C trazamos las tangentes a la circunferencia dada obteniendo T_1 y T_2, puntos de tangencia de las circunferencias solución.
Los centros de las circunferencias solución son los puntos intersección de la mediatriz de PQ con las rectas que resultan de unir los puntos de tangencia obtenidos con el centro de la circunferencia dada.

De la misma manera se resolvería en el caso de encontrarse los puntos P y Q en el interior de la circunferencia dada.

Curvas cónicas

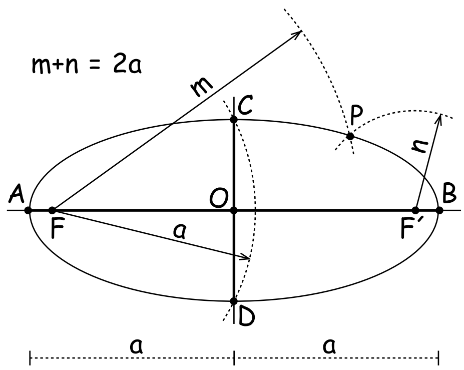
Son secciones producidas al cortar un cono de revolución por un plano.



Si el plano corta a todas las generatrices: Elipse.
Si el plano es paralelo a una generatriz: Parábola.
Si el plano es paralelo a dos generatrices: Hipérbola.

La elipse

Elipse es el lugar geométrico de los puntos como el P cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F´, llamados focos, es constante (2a): PF + PF´= 2a

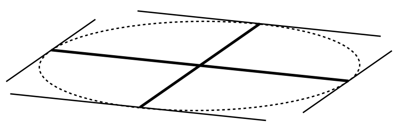


Podemos obtener puntos P de la elipse trazando arcos de circunferencia de centro los focos y radios segmentos m y n que sumen 2a.
Si en la recta que pasa por los focos situamos la mitad de la constante a cada lado de O, obtenemos los puntos A y B que son de la elipse pues AF+AF´=AF+FB=2a.
Si además trazamos arco de circunferencia de centro un foco y radio a , obtenemos los puntos C y D que también son de la elipse.

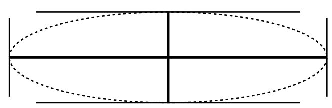
Los segmentos AB y CD son los llamados ejes de la elipse. Una elipse también estaría definida conocidos los ejes pues la constante 2a sería el eje mayor y los focos se obtendrían trazando un arco de circunferencia de radio la mitad de la constante y centro un extremo del eje menor.

Diámetros conjugados

Dos diámetros se dice que son conjugados si por los extremos de uno de ellos las tangentes a la elipse son paralelas al otro diámetro.

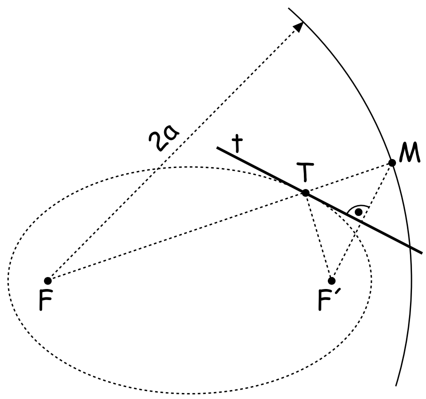


Los ejes de la elipse son también diámetros conjugados:



Circunferencia focal

Es la circunferencia que tiene por centro un foco y por radio la constante 2a.

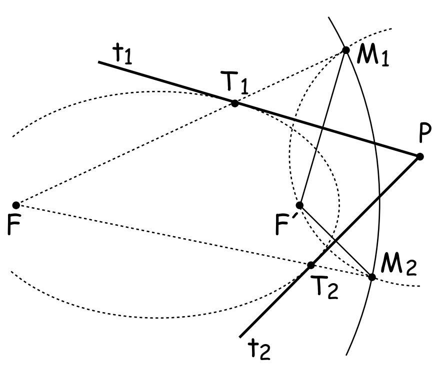


Si unimos un punto cualquiera M de la circunferencia focal con los focos F y F´, la mediatriz t del segmento MF´corta al radio FM en un punto T:
El punto T es punto de la elipse puesto que TF+TF´=TF+TM=2a.
La mediatriz t es tangente a la elipse pues para cualquier otro punto T_1 de t, resulta $T_1F+T_1F´=T_1F+T_1M$ que siempre será mayor que el radio FM=2a.

La tangente a una elipse por un punto de ella se obtiene con facilidad sin más que trazar la perpendicular a la bisectriz del ángulo FTF´.
Otra definición de elipse: Lugar geométrico de los puntos (como el T) que equidistan de un punto (F´) y de una circunferencia (focal de F).

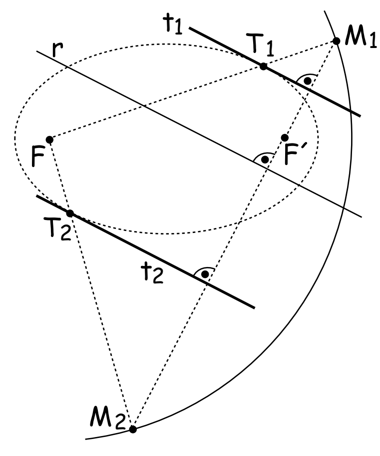
Tangentes por un punto exterior

Trazando el arco de circunferencia de centro P y radio PF´ obtendremos los puntos M de corte con la circunferencia focal de F. Las mediatrices de los segmentos MF´serán las tangentes buscadas.



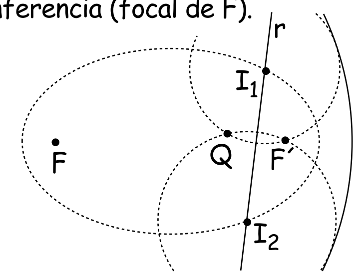
Tangentes paralelas a una recta

Trazando la perpendicular desde F´a la recta obtenemos los puntos M que dan lugar a las dos tangentes buscadas.



Intersección con una recta

Como la elipse es también el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por un punto (F´) y son tangentes a una circunferencia (focal de F).

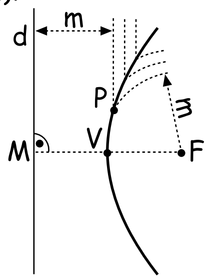


Los puntos intersección serán los centros de las dos circunferencias tangentes a la circunferencia focal de F, que pasan por F´y, para que el centro se encuentre en r, por el simétrico de F´respecto de r, Q.

Parábola e hipérbola

La parábola

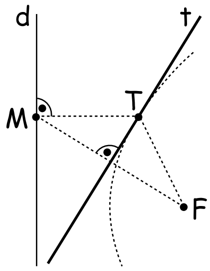
Es el lugar geométrico de los puntos como el P que equidistan de un punto fijo F (foco) y de una recta fija d (directriz).



Podemos obtener puntos de la parábola trazando arcos de circunferencia de centro F y rectas paralelas a la directriz a la misma distancia. Vértice de la parábola V es el punto medio de la perpendicular FM.

Trazado de tangentes

Para cualquier punto M de la directriz d, la mediatriz t del segmento FM es tangente a la parábola y el punto T, intersección con la perpendicular a la directriz por M, es el punto de tangencia.



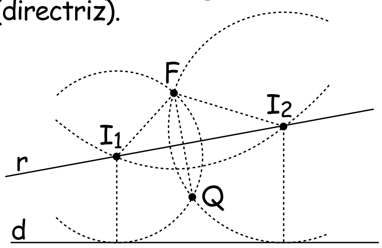
Para obtener la tangente a una parábola por un punto T de ella bastará trazar la perpendicular desde T a la directriz. La bisectriz del ángulo MTF será la tangente.

Para trazar la tangente paralela a una dirección bastará trazar por F la perpendicular a la dirección, el punto M intersección con la directriz determinara la tangente. Para trazar las tangentes por un punto exterior P trazaremos el arco de circunferencia de centro P y radio PF, los puntos M de corte con la directriz determinarán las tangentes buscadas.

Observa que la parábola se comporta como una elipse con un foco F´ impropio, y la directriz como la circunferencia focal de F´, de radio infinito.

Intersección con una recta

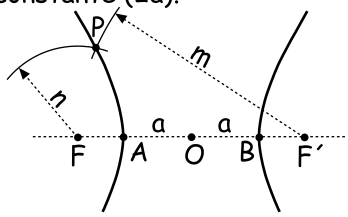
Observa que por ser TM=TF, la parábola se puede definir como el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por un punto (F) y son tangentes a una recta (directriz).



Los puntos intersección con una recta serán los centros de las circunferencias tangentes a d, pasando por F y, para que se encuentren en r, por su simétrico Q respecto de r.

La hipérbola

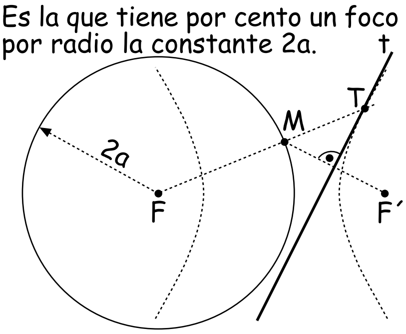
Es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos F y F´, llamados focos, es constante (2a).



Vértices de la hipérbola son los puntos A y B situados a una distancia a de O (punto medio de FF´). Podemos obtener puntos de la hipérbola trazando arcos de circunferencia de centros F y F´ y radios m y n, pares de segmentos cuya diferencia sea 2a.

Circunferencia focal

Es la que tiene por cento un foco y por radio la constante 2a.



Si unimos un punto cualquiera M de la circunferencia focal con los focos F y F´, la mediatriz t del segmento MF´es tangente a la hipérbola y el punto T, intersección con el radio FM, es el punto de tangencia (la demostración es análoga a la de la elipse).

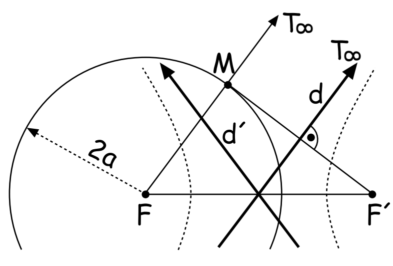
Tangentes

Los procedimientos para el trazado de tangentes a la hipérbola son análogos a los ya estudiados en la elipse y en la parábola:
La tangente a una hipérbola por un punto T de ella es la bisectriz del ángulo FTF´.

Las tangentes paralelas a una dirección se obtendrán trazando por un foco la perpendicular a la dirección. Los puntos M intersección con la circunferencia focal del otro foco determinaran las tangentes.
Para obtener las tangentes desde un punto P trazaremos el arco de circunferencia de centro P y radio PF´. Los puntos M de corte con la circunferencia focal del otro foco determinarán las tangentes buscadas.

Asíntotas

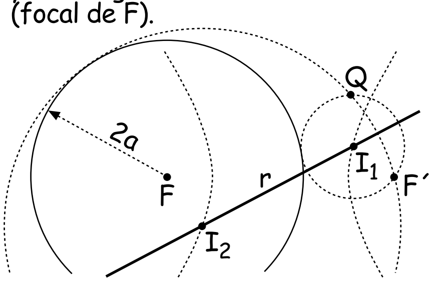
Son las tangentes a la hipérbola en sus puntos impropios.



Las asíntotas d y d´se obtienen a partir de los puntos de tangencia M de las tangentes trazadas desde un foco a la circunferencia focal del otro foco. La mediatriz del segmento MF´ resulta paralela al radio FM, por tanto el punto de tangencia T se encontrará en el infinito.

Intersección con una recta

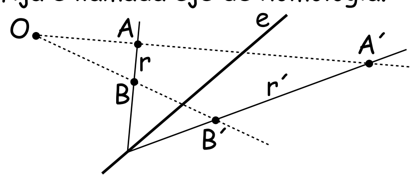
La hipérbola es también el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por un punto (F´) y son tangentes a una circunferencia (focal de F).



Los puntos intersección serán los centros de las dos circunferencias tangentes a la circunferencia focal de F, que pasan por F´y, para que el centro se encuentre en r, por su simétrico Q respecto de r.

Homología plana

Dos figuras F y F´ son homológicas si se corresponden punto a punto y recta a recta de tal forma que:
1- Las rectas que unen pares de puntos homólogos pasan por un punto fijo O llamado centro de homología.
2-Los pares de rectas homólogas se cortan en puntos de una recta fija e llamada eje de homología.

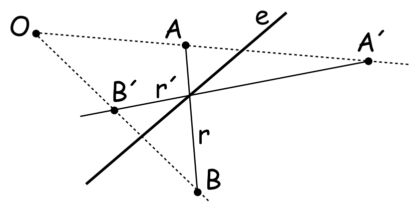


Así en la homología de centro O y eje e, los puntos A´, B´son homólogos de los A, B y la recta r´es homóloga de r (y viceversa).

Determinación de una homología

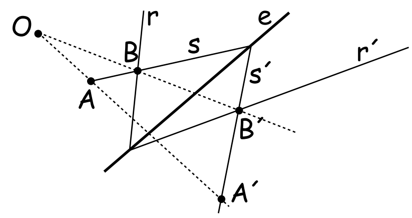
Una homología queda determinada conocidos, además del centro y el eje de homología, un par de puntos homólogos o bien un par de rectas homólogas:

Homología definida por O, e, A y A´



Para hallar el homólogo de un punto B trazaremos la recta r, que pasa por B y por A, y obtendremos su homóloga r´que pasará por el punto del eje y por A´. El punto buscado B´se encontrará en la intersección de r´con la recta OB.

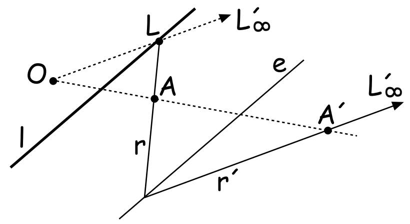
Homología definida por O, e, r y r´



Para hallar el homólogo de un punto A trazaremos una recta s que pase por A y obtendremos su homóloga s´que pasará por B´, homólogo de B. El punto buscado A´se encontrará en la intersección de s´con la recta OA.

Rectas límites

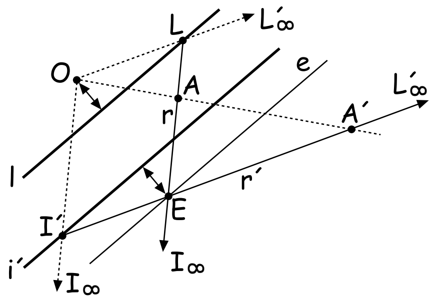
Son las homólogas de las rectas del infinito de ambas figuras.
Las dos rectas límites, l e i´, son paralelas al eje puesto que han de concurrir en él con sus homólogas, las rectas del infinito.



Para obtener una recta límite basta obtener el homólogo de un punto del infinito de la otra figura. La paralela al eje por dicho punto es la recta límite.

Relación entre las rectas límites

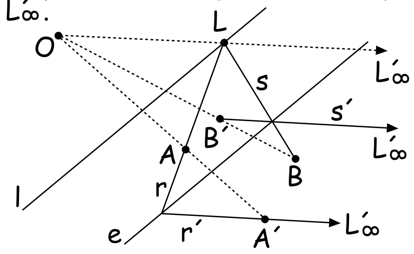
Si obtenemos las dos rectas límites a partir de los puntos del infinito de una recta r y de su homóloga r´:



La figura OLEI´es un paralelogramo por lo que se puede afirmar que la distancia del centro de homología a una recta límite es igual que la del eje a la otra recta límite.

Homología definida por recta límite

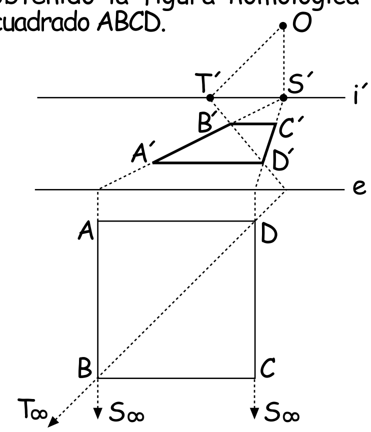
Las rectas límites también definen una homología pues cualquier recta trazada por O determinará un par de puntos homólogos como el L y el L´∞.



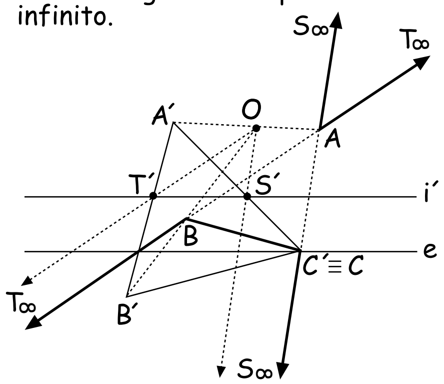
Así, en la homología definida por O, e y la recta límite l, hemos obtenido los homólogos de los puntos A´y B apoyándonos en un par de puntos homólogos cualquiera, L y L´, obtenidos a partir de la recta límite dada.

Obtención de figuras homológicas

Siempre se puede proceder punto a punto, pero suele ser más conveniente considerar los puntos como intersección de rectas. Así se ha obtenido la figura homológica del cuadrado ABCD.



Si una figura corta a su recta límite su homóloga tendrá puntos en el infinito.



Observa cómo el triángulo A´B´C´, por cortar a su recta límite i´, tiene por homólogo el triángulo ABC con los puntos S y T en el infinito.

Resolución de problemas

Debes considerar:
Rectas paralelas tienen por homólogas rectas que pasan por un mismo punto de la recta límite.
Los ángulos de una de las figuras son iguales a los que producen las rectas auxiliares que, partiendo de O, determinan los puntos en la recta límite de la otra figura.

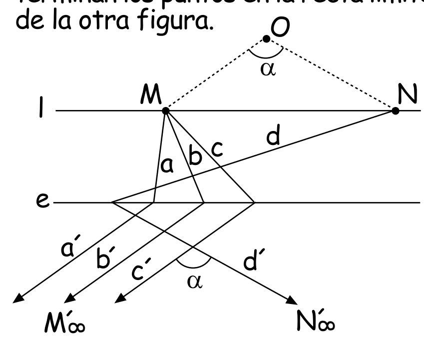
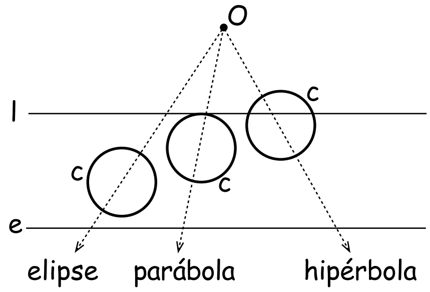


Figura homológica de la circunferencia

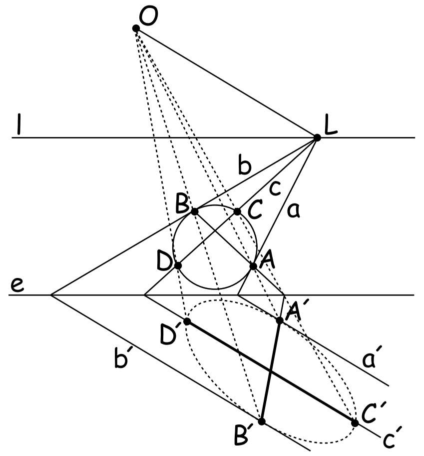
La figura homológica de una circunferencia es una curva cónica:



Si la circunferencia es secante a su recta límite tendrá por homóloga una hipérbola, si es tangente, una parábola y si no tiene puntos en común con su recta límite tendrá por homóloga una elipse.

Elipse homóloga de una circunferencia

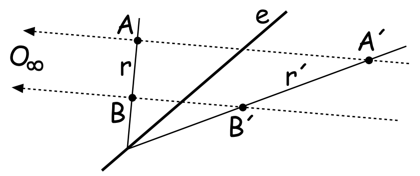
Si queremos obtener la figura homóloga de una circunferencia siempre podemos tomar puntos de la circunferencia y obtener sus homólogos, que serán puntos de la cónica correspondiente.



Si la circunferencia se transforma en elipse podemos obtener dos diámetros conjugados tomando para ello un punto cualquiera L de la recta límite y trazar desde él las tangentes a y b a la circunferencia. Sus homólogas serán paralelas a OL y por tanto los puntos de tangencia A´y B´, homólogos de A y B, constituirán un diámetro de la elipse.
El conjugado se encontrará en la recta c´, por tanto obtenemos su homóloga c y los puntos de corte C y D con la circunferencia. Sus homólogos C´y D´son los extremos del diámetro conjugado al A´B´.

Afinidad

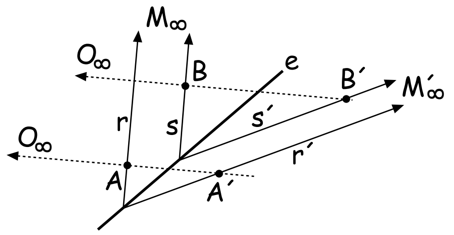
Homología afín o afinidad es la homología que tiene por centro un punto impropio y por eje una recta propia.



Una afinidad queda definida conocidos el eje, la dirección del centro de homología (dirección de afinidad) y un par de puntos homólogos o un par de rectas homólogas.
Los pares de puntos homólogos se encontrarán siempre sobre rectas paralelas a la dirección de afinidad.

Paralelismo

En una afinidad no hay rectas límites puesto que la recta del infinito, por pasar por el centro, es homóloga de sí misma. Puntos del infinito de una figura tienen como homólogos puntos del infinito de la otra figura.

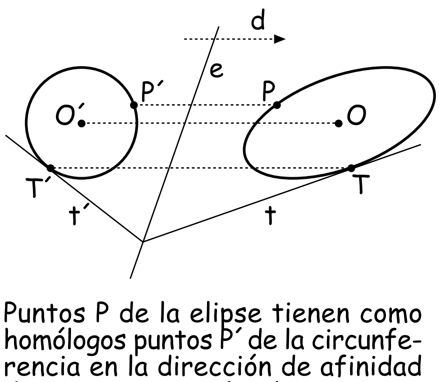


Como puedes observar, al contrario que en la homología, en una afinidad el paralelismo se conserva, esto es, dos rectas r y s paralelas tienen como homólogas otras dos r´y s´que también lo son.
Esto permite obtener los homólogos de puntos y de rectas de manera más sencilla:

Si en la afinidad conocemos un par de puntos homólogos A y A´, la homóloga de una recta cualquiera s se puede obtener trazando la paralela r por A, obteniendo su homóloga r´por A´. La paralela a r´por el punto del eje será la recta buscada s´.
Si conocemos un par de rectas homólogas r y r´, el homólogo de un punto B se obtendrá trazando por él la recta auxiliar s, paralela a r y obteniendo su homóloga s´, que será paralela a r´. B´se encontrará en s´y en la dirección de afinidad.

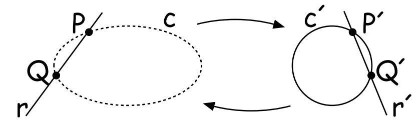
La elipse como figura afín de una circunferencia

Al no existir rectas límites, una circunferencia se transformará siempre en una elipse.



Puntos P de la elipse tienen como homólogos puntos P´de la circunferencia en la dirección de afinidad d; tangentes t a la elipse tienen como homólogas tangentes t´a la circunferencia, ...

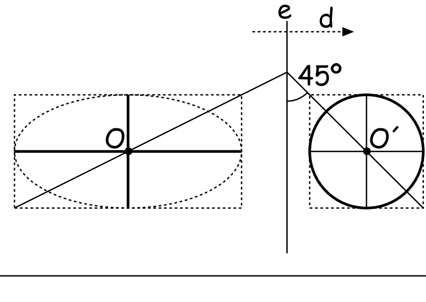
La afinidad proporciona un medio sencillo para resolver problemas en la elipse: resolviendolos en la circunferencia afín y obteniendo luego sus homólogos.



Así, por ejemplo, la intersección de una recta r con la elipse c se obtendrá hallando r´, homóloga de r. Los puntos buscados serán P y Q, homólogos de P´Y Q´, intersección de r´con la circunferencia c´. Pero para ello necesitaremos definir en primer lugar una afinidad que transforme la elipse en una circunferencia y no en otra elipse:

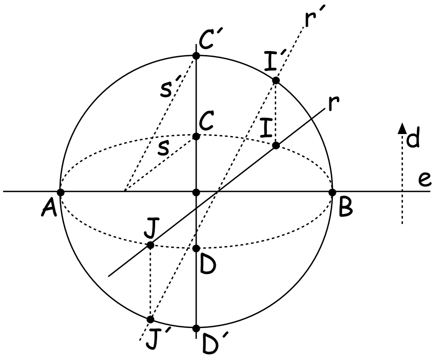
Afinidades elipse-circunferencia

Siempre podemos definir una afinidad elipse-circunferencia fijando un eje cualquiera y obteniendo el par de puntos homólogos de manera que el paralelogramo circunscrito a la elipse se transforme en cuadrado circunscrito a la circunferencia.
Sin embargo más sencillas son las afinidades que tienen por eje una paralela a un eje de la elipse:



Afinidad de eje un eje de la elipse

Es la afinidad más sencilla y práctica que se puede definir. La circunferencia afín tendrá por diámetro el mismo eje de la elipse AB que, por encontrarse en el eje de afinidad, es homólogo de sí mismo. La afinidad queda definida por los extremos del eje menor de la elipse C y D y sus homólogos en la circunferencia, los extremos del diámetro perpendicular C´y D´.

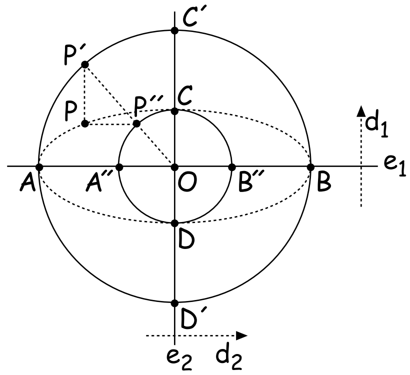


Puedes obsevar con que facilidad se han obtenido los puntos intersección de la recta r con la elipse: trazando s, paralela a r por C, obteniendo su homóloga s´por C´; r´, homóloga de r, será paralela a s´por el punto del eje y corta a la circunferencia en los puntos I´y J´, homólogos de los puntos intersección buscados.

Para poder definir esta afinidad es necesario conocer al menos un eje de la elipse.

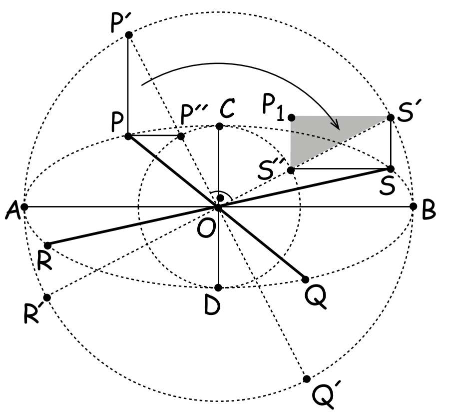
Dos afinidades

Si definimos dos afinidades que transforman la elipse en dos circunferencias podemos obtener puntos P de la elipse trazando radios OP´ y, por los puntos P´y P´´ de las dos circunferencias, paralelas a las dos direcciones de afinidad.



Diámetros conjugados y ejes de la elipse

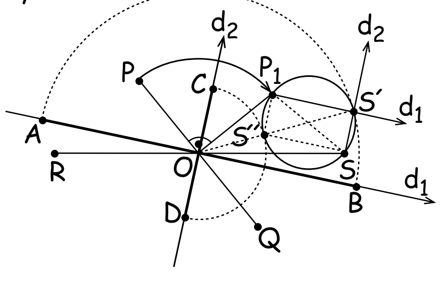
Dados los ejes AB y CD de una elipse podemos obtener con facilidad un par de diámetros conjugados PQ y RS:



Para ello, una vez trazadas las dos circunferencias resultado de las dos afinidades, hemos tomado dos diámetros perpendiculares cualquiera P´Q´ y R´S´ en las circunferencias y hemos obtenido sus homólogos PQ y RS que serán diámetros conjugados en la elipse.

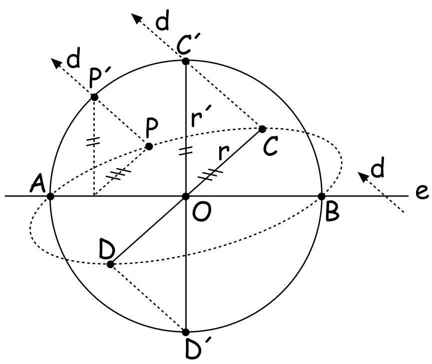
Observamos además en la figura anterior que si giramos el triángulo PP´P´´, 90º hacia S obtenemos P_1 y se forma un rectángulo de lados paralelos a los ejes.
Esta relación nos proporciona un procedimiento sencillo para resolver el problema contrario, la obtención de los ejes a partir de dos diámetros conjugados PQ y RS:

Giramos 90º OP hacia OS obteniendo P_1. Trazamos la circunferencia de diámetro P_1S y unimos su centro con el centro de la elipse determinando en la circunferencia los puntos S´y S´´y con ellos las direcciones de los ejes d_1 y d_2 . Sólo queda trazar las paralelas por O y los arcos de radios OS´y OS´´para obtener los ejes AB y CD.



Afinidad de eje un diámetro de la elipse

Si lo que conocemos de una elipse son dos diámetros conjugados AB y CD es posible definir una afinidad de eje un diámetro de la elipse. La circunferencia homóloga tendrá por diámetro el mismo que la elipse y por tanto la podemos trazar. No queda más que trazar el diámetro perpendicular a AB para obtener C´y D´en la circunferencia que serán los homólogos del diámetro conjugado CD. En este caso la afinidad no es ortogonal y su dirección vendrá dada al unir C con C´o D con D´.



Una vez definida esta afinidad podemos obtener puntos de la elipse simplemente tomando puntos de la circunferencia y obteniendo sus homólogos.
En la figura se ha tomado el punto P´y se ha trazado por él paralela a r´hasta el eje; por el punto del eje paralela a r y desde P´paralela a la dirección de afinidad.
Observa que se forman triángulos semejantes de lados paralelos.

También podemos resolver otros problemas como por ejemplo tangentes a la elipse desde un punto P: Se ha obtenido P´, homólogo de P. Desde P´se han trazado las tangentes a la circunferencia a´y b´. Sus homólogas a y b son las tangentes buscadas.