Génie Biologique - S1 - Echauffements

Résumé de cours

Table des matières

— Les séances de TP seront utilisées comme séances de soutien individuel pour finir les exercices
— Interrogation de 1h à mi-route

1 Mise en équations et proportionnalité (3h)

1.1 Préliminaire culturel

Ensembles de nombres classiques :
- $\mathbb{N}$
- $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{R}$ (1870)
- $\mathbb{C}$

L'ensemble dans lequel on cherche des solutions est aussi important que l'équation elle même.

1.2 Équations du premier et second degré

Pour résoudre une (in)équation, on la transforme jusqu'à ce que la solution apparaisse. Pour trois réels a, b, c,
- si $c \neq 0$, alors $a = b \Leftrightarrow ac = bc$
- si $c > 0$, alors $a < b \Leftrightarrow ac < bc \Leftrightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
- si $c < 0$, alors $a < b \Leftrightarrow ac > bc \Leftrightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Pour les équations polynomiales de degré 1 et 2, on a des formules faciles pour exprimer les racines (solutions)
- La solution x de $ax + b = 0$ est $-b/a$ si $a \neq 0$ et ce qu'on veut sinon
- Les deux solutions x_1 et x_2 (éventuellement confondues) de $ax^2 + bx + c = 0$ sont $x = \frac{-b+\delta}{2a}$, où δ est un nombre, éventuellement complexe, tel que $\delta^2 = b^2 - 4ac$
  De plus, ces deux solutions vérifient le système $\{x_1 x_2 = c/a$ et $x_1 + x_2 = -b/a\}$
- Il existe des formules pour les degrés 3 et 4 mais il a été démontré que pour les degrés 5 et au delà, on ne peut pas écrire de formule générale avec +,-,·,/ et $\sqrt{\ }$ (E. Galois – 1830)

Pour visualiser si la fonction polynôme est positive ou négative entre les racines, tracez un graphe approximatif de ax^2

Identités remarquables
- $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

1.3 Proportionnalité

Rappels
- Pourcentage est synonyme de proportion et de rapport (anglais *ratio*)
- Un pourcentage n'est pas une unité, c'est justement un adimensionnement

— Un pourcentage est forcément “de quelquechose”

Ajouter à une valeur un certain pourcentage d’elle même se traduit pour une multiplication :

$$V_{\text{après}} = V_{\text{avant}} \pm x\%(V_{\text{avant}}) = V_{\text{avant}}(1 \pm \frac{x}{100}) = V_{\text{avant}}(\frac{100 \pm x}{100})$$

Inversement, on calcule le pourcentage de variation, par rapport à la valeur de départ, en divisant :

$$x\% = 100\left(\frac{V_{\text{après}} - V_{\text{avant}}}{V_{\text{avant}}}\right)$$

Il faut surtout être très vigilant à quelle valeur s’applique le pourcentage :

— si j’ajoute 5% puis que j’ajoute 5%, c’est sous-entendu “de la nouvelle valeur” et je trouve plus qu’en ajoutant directement 10% à la valeur de départ

— si j’ajoute 5% puis que je soustrais 5%, c’est sous-entendu “de la nouvelle valeur” et je trouve moins que la valeur de départ

— si j’ai ajouté 5%, je ne trouve pas la valeur de départ en enlevant 5% à la valeur d’arrivée

Un excellent exercice utilisant les pourcentages est le, très mal compris, calcul de l’impôt sur le revenu.

1. On calcule le revenu net global, qui vaut le revenu brut imposable moins les frais réels ou 10%, selon ce qui est le plus avantageux.
2. On calcule le quotient familial QF en divisant le revenu net imposable du foyer par le nombre de parts.
3. On répartit l’ensemble du QF dans les tranches successives indiquées sur le tableau 1.1.
4. On calcule l’impôt sur chacune des tranches et on aditionne ces valeurs : c’est l’impôt par part.
5. On multiplie l’impôt par part par le nombre de parts : c’est l’impôt total du foyer (impôt brut en fait : certains modificateurs peuvent ensuite s’appliquer ... mais majoritairement on en reste là)

Table 1.1 – Barème de l’I.R. 2013 (en euro)

Tranche de répartition	Taux par tranche
$[0; 6011[$	0%
$[6011; 11991[$	5,5%
$[11991; 26631[$	14%
$[26631; 71397[$	30%
$[71397; 151200[$	41%
$[151200; +\infty[$	45%

Sources :

— http ://vosdroits.service-public.fr/particuliers/F1419.xhtml

— http ://www.impots.gouv.fr/portal/dgi/public/popup ?espId=0&typePage=cpr02&docOid =documentstandard_6117

Mise en équations et proportionnalité - Exercices

Exercice 1 Partage Un grand-père partage entre ses trois petits enfants la somme de 750 € : Leila reçoit le double de Marc moins la somme de 250 €. Stéphanie obtient le triple de Marc moins la somme de 500 €. Le partage est-il équitable ?

Exercice 2 Géométrie Soit T un triangle dont un côté mesure $6x$ et dont les deux autres mesurent chacun $x+3$. Soit R un rectangle de côtés $x+2$ et $x+3$. Déterminer x pour que le triangle ait un périmètre supérieur à celui du rectangle.

Exercice 3 Location de voitures Voici le principe de la location de 3 voitures. Il y a un forfait puis le prix au kilomètre. Pour une Clio, le forfait est de 20 € et le prix au kilomètre de 0,5 €. Pour une Saxo, le forfait est de 30 € et le prix au kilomètre de 0,3 €. Pour une Megane, le forfait est de 40 € et le prix au kilomètre de 0,2 €.

1. Pour quel distance en kilomètres, le prix de location d'une Clio est-il supérieur à celui d'une Saxo ?
2. Pour quel distance en kilomètres, le prix de location d'une Clio est-il inférieur à celui d'une Megane ?

Exercice 4 Compléter les factures en euros ci dessous :

Facture 1	15 Mai 2008
Brut	15 000
Remise 5%	
Net Commercial	
TVA 19,6%	
Net à payer	

Facture 2	25 Mai 2008
Brut	
Remise 10%	
Net Commercial	
TVA 19,6%	
Net à payer	6458,40

Exercice 5 Sources :

— http ://vosdroits.service-public.fr/particuliers/F1419.xhtml

— http ://www.impots.gouv.fr/portal/dgi/public/popup ?espId=0&typePage=cpr02&docOid =documentstandard_6117

L'objectif est le calcul de l'Impôt sur les revenus au titre de 2013 de l'oncle Picsou.

Le calcul se déroule ainsi :

1. On calcule le revenu net imposable qui vaut le revenu brut imposable moins 10%.
2. On calcule le quotient familial QF en divisant le revenu net du foyer par le nombre de parts.

3. On répartit l'ensemble du QF dans les tranches successives indiquées sur le tableau 1.2.
4. On calcule l'impôt sur chacune des tranches et on aditionne ces valeurs : c'est l'impôt par part.
5. On multiplie l'impôt par part par le nombre de parts : c'est l'impôt total du foyer (impôt brut en fait : certains modificateurs peuvent ensuite s'appliquer ... mais majoritairement on en reste là)

B. Picsou est célibataire sans enfants (1 part), et déclare avoir perçu en 2013 un revenu (brut) imposable de 30 000 €, sans autres revenus et pas de charges déductibles.

1. Calculer le montant d'impôt maximal pour chacune des tranches (dernière exclue, évidemment).
2. Calculer le revenu net global de Mr. Picsou.
3. Quel est le montant de l'impôt que Mr. Picsou doit payer ?
4. Calculer le taux d'imposition moyen, par rapport au revenu brut imposable de Mr. Picsou.

Table 1.2 – Barème de l'I.R. 2013 (en euro)

Tranche de répartition	Taux par tranche
$[0; 6011[$	0%
$[6011; 11991[$	5,5%
$[11991; 26631[$	14%
$[26631; 71397[$	30%
$[71397; 151200[$	41%
$[151200; +\infty[$	45%

1.4 Renforcement

Exercice 6 Géométrie On dispose d'une plaque de carton carrée de 10 cm de côté. Dans chaque coin on découpe un carré identique. On obtient alors le patron d'un boite sans couvercle. Quelle doit être la mesure du côté du carré pour que la surface de ce qui reste soit 72 ?

Exercice 7 Voici les chiffres d'affaires annuels d'une entreprise en millions d'euros :

Année	2005	2006	2007
C.A.	1,7	2,3	3,2

1. Quel est le pourcentage d'évolution entre 2005 et 2006 ?
2. Quel est le pourcentage d'évolution entre 2006 et 2007 ?
3. Quel est le pourcentage d'évolution entre 2005 et 2007 ?

Exercice 8

1. On considère une augmentation de 5%, quel est le coefficient multiplicateur ?
2. On considère une remise de 3%, quel est le coefficient multiplicateur ?
3. Avant une remise de 4%, le prix d'un objet est de 50 euros, quel est sont prix après remise ?
4. Le prix d'un objet est de 130 euros TTC. Quel est sont prix hors taxe sachant que la Taxe est de 5,5% ?

Exercice 9 DVD

1. Un lecteur de DVD coute 150 euros.
   a) Il subit une augmentation de 5%. Quel est le prix de vente de ce lecteur ?
   b) Il subit maintenant une remise de 5%. Quel est le nouveau prix de vente de ce lecteur ?
   c) Quelle devrait être la remise pour avoir un prix de vente de 150 euros ?
2. On considère maintenant un objet au prix initial de P_0 euros.
   a) Il subit une augmentation de t_1%. On note P_1 le prix après cette augmentation. Exprimer P_1 en fonction de P_0 et t_1.
   b) Il subit une remise de t_2%. On note P_2 le prix après cette remise. Exprimer P_2 en fonction de P_1 et t_2.
   c) Exprimer P_2 en fonction de P_0, t_1 et t_2.
   d) Etant donné t_1, calculer t_2 pour que $P_2 = P_0$.

Exercice 10 Compléter les factures suivantes

Facture 2	26 Mai 2008
Brut	
Remise 5%	
Rabais pour malfaçon 2%	
Net Commercial	
TVA 5,5%	
Net à payer	1964,41

Facture 2	29 Mai 2008
Brut	
Remise 2%	
Après remise	
Rabais pour malfaçon 1%	98
Net Commercial	
TVA 19,6%	
Net à payer	

Réponses

Réponse 1 Partage Oui

Réponse 2 Géométrie $x > 1$

Réponse 3 Location de voitures

1. Dès 50km
2. Jusqu'à 66km

Réponse 4 Compléter les factures en euros ci dessous :

Facture 1	15 Mai 2008
Brut	15 000
Remise 5%	750
Net Commercial	14250
TVA 19,6%	2793
Net à payer	17043

Facture 2	25 Mai 2008
Brut	6000
Remise 10%	600
Net Commercial	5400
TVA 19,6%	1058,40
Net à payer	6458,40

Réponse 5

1. 0, 328.9, 2049.6, 13429.8, 32719.23
2. $RN = 27000$
3. 2489.2
4. 8.297%

Réponse 6 Géométrie $x = \sqrt{7}$

Réponse 7

1. 35,3%
2. 39,1%
3. 88,23%

Réponse 8

1. 1.05
2. 0.97
3. 48€
4. 123.22

Réponse 9 DVD

1. a) 157,5
   b) 149,63
   c) 4,76%
2. a) $P_1 = (1 + t_1)P_0$
   b) $P_2 = (1 - t_2)P_1$
   c) $P_2 = (1 - t_2)(1 + t_1)P_0$
   d) $t_2 = \frac{t_1}{1+t_1}$

Réponse 10 Compléter les factures suivantes

Facture 2	26 Mai 2008
Brut	2000
Remise 5%	100
Rabais pour malfaçon 2%	38
Net Commercial	1862
TVA 5,5%	102,41
Net à payer	1964,41

Facture 2	29 Mai 2008
Brut	10000
Remise 2%	200
Rabais pour malfaçon 1%	98
Net Commercial	9702
TVA 19,6%	1901,59
Net à payer	11603,59

2 Fonctions usuelles (3h)

Herbier minimaliste

2.1 Fonctions polynomiales (puissances de x entières et positives)

Utilisées pour représenter des phénomènes à croissance modérée
- Exemple : $f : x \mapsto 3x^5 + 4x^3 - 2$
- Graphique
- Ensemble de définition : $\mathbb{R}$
- Limites en $\pm\infty$: $\pm\infty$ – ne dépend que du terme de plus haut degré

2.2 Fonctions racine

Ce sont les réciproques des puissances entières
- Exemple : $f : x \mapsto x^{1/3}$
- Graphique
- Ensemble de définition : $\mathbb{R}^+$
- Limites en $+\infty$: $+\infty$

2.3 Fonctions $\sin$ et $\cos$

Utilisées pour représenter des phénomènes périodiques
- Ensemble de définition : $\mathbb{R}$
- La fonction sin est *impaire* : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = -f(x)$
- La fonction cos est *paire* : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = f(x)$
- Les fonctions sin et cos sont 2π-*périodiques* : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x + 2\pi) = f(x)$
- Valeurs remarquables lisibles sur le cercle trigonométrique

2.4 Fonctions puissance d'un réel > 0

Utilisées pour représenter des phénomènes à croissance (très) rapide
- Exemple : $f : x \mapsto e^x$
- Graphique
- Ensemble de définition : $\mathbb{R}$

— Limite en $-\infty$: 0, en $+\infty$: $+\infty$
— Propriété fondamentale : $e^{a+b} = e^a \times e^b$
— Limites particulières : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$ et $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

2.5 Fonctions logarithmes

Ce sont les réciproques des fonctions puissances
— Exemple : $f : x \mapsto \ln x$
— Graphique
— Ensemble de définition : $\mathbb{R}_\star^+$
— Limite en 0 :$-\infty$, en $+\infty$: $+\infty$
— Propriété fondamentale : si $a > 0$ et $b > 0$, alors $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
— Limites particulières : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x\to0^+} x \ln x = 0$

2.6 Etude de fonction

1. Etablir l'ensemble de définition
2. Chercher de la périodicité et/ou de la parité pour réduire le domaine d'étude
3. Calculer la dérivée et établir son domaine de définition
4. Etablir le tableau des variations
5. Calculer les valeurs des maximums et minimums locaux
6. Calculer les limites aux bornes des intervalles de définition
7. Tracer un graphique approximatif

Fonctions Usuelles - Exercices

Base

Exercice 1 Ensembles de définition Donnez l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^3$
2. $f(x) = \left(\frac{x-1}{3x^2+1}\right)^3$
3. $f(x) = \sqrt{4x^2 - 5x + 1}$
4. $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$
5. $f(x) = \frac{1+x^2}{1-\cos(x)}$
6. $f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$

Exercice 2 Parité Dites si les fonctions suivantes sont paire, impaire ou aucun des deux :

1. $f(x) = \sin(2x)$
2. $f(x) = \sin(x) - 3\cos(1 + 5x)$

Exercice 3 Exponentielle Simplifier les expressions suivantes :

1. $\frac{\sqrt{e}}{ee^{-2}}$
2. $\frac{(2e^{-2})^2}{3e^{-2}}$

Résoudre les (in)équations suivantes :

1. $e^{2x} \leqslant 1$
2. $e^{x^2} = e$

Exercice 4 Logarithme Népérien Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln e^3 + \ln e^2$
2. $\ln e^{-3} + \ln \sqrt{e}$

Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln x = \ln 5 + 3 \ln 2$
2. $\ln x = -5$

Exercice 5 Chimie 1 On donne la relation $PV^\gamma = k$ où P et V sont de variables et γ et k des constantes.

Exprimer γ en fonction de P, V, k.

Exercice 6 Chimie 2 L'acidité d'une solution est mesurée par son pH : $pH = -\log([H_3O^+])$, où $[H_3O^+]$ désigne la concentration d'ions H_3O^+ (en mole par litre) dans la solution (on se rappellera que *log* est le logarithme en base 10).

1. Que vaut $\log(100)$?
2. Si la concentration en H_3O^+ décuple, que vaut alors le nouveau pH de la solution ?
3. L'étiquette d'une eau minérale gazeuse indique $pH = 6,3$. Quelle est la concentration en ions H_3O^+ de cette eau ?

Exercice 7 Electricité Un circuit comprend un générateur de force électromotrice E, une bobine de résistance R et d'inductance L et un interrupteur. En physique, on montre que, t secondes après avoir fermé l'interrupteur, l'intensité du courant, en ampères, est donnée par :

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

On prend : $E = 2$ (volts), $R = 10$ (Ohms), $L = 1$ (Henry).

1. Donner l'expression de $i(t)$ pour tout réel $t \geq 0$.
2. Avec $I_0 = \frac{1}{5}$, à partir de quel instant a-t-on $i(t) > 0,99.I_0$.

Renforcement

Exercice 8 Ensembles de définition Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x + 3 - \frac{1}{2x+2}$
2. $f(x) = \sqrt{x} + 3 + \frac{3}{x-2}$
3. $f(x) = \sqrt{x} + 2 + \frac{2}{\sqrt{x}-4}$
4. $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$
5. $f(x) = \sqrt{3\cos(x)}$
6. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-\cos(x)}\right)$

Exercice 9 Parité Dites si les fonctions suivantes sont paires, impaires ou aucun des deux :

1. $f(x) = \frac{\sin(x)}{3\cos(5x)}$
2. $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2-2}$
3. $f(x) = \sin(x) + x$
4. $f(x) = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$

Exercice 10 Exponentielle et Logarithme Simplifier les expressions suivantes

1. $e^{\ln 2} + e^{\ln 3}$
2. $e^{-\ln 3} + e^{\ln 5}$
3. $\ln(e^4\sqrt{e})$

Résoudre les (in)équations suivantes

1. $e^{1-x^2} \leqslant 0$
2. $e^{2x} - e^x = 0$
3. $\ln\big((x-2)(x-32)\big) = 6\ln 2$

Exercice 11 Chimie On donne les relations :

$$\begin{aligned} P_1.V_1^{\gamma} &= P_2.V_2^{\gamma} \\ T_1.V_1^{\gamma-1} &= T_2.V_2^{\gamma-1} \end{aligned}$$

1. En déduire les égalités :
$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$
2. Exprimer γ en fonction de T_1, T_2, V_1, V_2 puis en fonction de P_1, P_2, V_1, V_2 et enfin en fonction de T_1, T_2, P_1, P_2.

Exercice 12 Physique La loi d'évolution d'un corps radioactif est donnée par la formule $N(t) = N_0.e^{-at}$, a est une constante positive, $N(t)$ est le nombre d'atomes contenus dans un échantillon de ce corps au temps t.

1. On désigne par T le temps au bout duquel le nombre d'atomes a diminué de moitié (période de demi-vie). C'est à dire qu'au temps T, le nombre d'atomes initial a été divisé par deux.
   a) Exprimer a en fonction de T.
   b) Exprimer $N(t+T)$ en fonction de $N(t)$.
2. Au bout de combien de temps (en années à 10^{-2} près) 1 g de Radium perdra-t-il une masse de 1 mg (la période de demi-vie du Radium étant 1622 ans) ?
   Remarque : la masse est proportionnelle au nombre d'atomes.

Réponses

Réponse 1 Ensembles de définition

1. $\mathbb{R}$
2. $\mathbb{R}$
3. $]-\infty; 1/4] \bigcup [1; +\infty]$
4. $]-\infty; -2[\bigcup]2; +\infty]$
5. $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
6. $]2; +\infty]$

Réponse 2 Parité

1. Impaire
2. Aucun des deux

Réponse 3 Exponentielle

1. $e^{3/2}$
2. $\frac{4}{3}e^{-2}$
3. $x \leqslant 0$
4. $x = \pm 1$

Réponse 4 Logarithme

1. 5
2. -5/2
3. $x = 40$
4. $x = e^{-5}$

Réponse 5 Chimie 1 $\gamma = \frac{\ln k - \ln P}{\ln V}$

Réponse 6 Chimie 2

1. 2
2. Le pH diminue de un point
3. $10^{-6,3} = 5.10^{-7}$ mole par litre

Réponse 7 Electricité

1. $i(t) = \frac{1}{5}(1 - e^{-10t})$
2. $t > -\frac{\ln 0,01}{10} = 0,46051$

Réponse 8 Ensembles de définition

1. $\mathbb{R} \setminus -1$
2. $[0; 2[\bigcup]2; +\infty[$
3. $[0; 16[\bigcup]16; +\infty[$
4. $]0; 1[\bigcup]1; +\infty[$
5. $\{[2k\pi - \pi/2; 2k\pi + \pi/2], k \in \mathbb{Z}\}$
6. $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Réponse 9 Parité

1. Impaire
2. Paire
3. Impaire
4. Paire

Réponse 10 Exponentielle et Logarithme

1. 5
2. 16/3
3. 9/2
4. Impossible
5. $x = 0$
6. $x = 0$ et $x = 34$

Réponse 11 Chimie $\gamma = \dfrac{\ln\left(\frac{V_1T_2}{V_2T_1}\right)}{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}, \gamma = \dfrac{\ln\left(\frac{P2}{P_1}\right)}{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}, \gamma = \dfrac{\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}{\ln\left(\frac{P_2T_1}{P_1T_2}\right)}$

Réponse 12 Physique La loi d'évolution d'un corps radioactif est donnée par la formule $N(t) = N_0.e^{-at}$, a est une constante positive, $N(t)$ est le nombre d'atomes contenus dans un échantillon de ce corps au temps t et N_0 est le nombre d'atomes au temps $t = 0$.

1. a) $a = \frac{\ln 2}{T}$
   b) $N(t + T) = \frac{N(t)}{2}$.
2. $T_2 = -\frac{\ln\left(\frac{999}{1000}\right)}{\ln 2} 1622 = 2.34$

3 Dérivées et primitives (3h)

La dérivée d'une fonction en donne le sens de variation et sa primitive en donne le cumul des valeurs

3.1 Dérivation

Les fonctions usuelles du chapitre précédent sont dérivables sur leur ensemble de définition, sauf pour les racines qui ne sont pas dérivables en 0.

3.1.1 Taux d'accroissement

Si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x}$ existe, alors on note cette valeur $f'(x)$

3.1.2 Opérations sur les dérivées

Soient α un nombre réel et u, v et f des fonctions

- $(\alpha u)' = \alpha u'$
- $(u+v)' = u' + v'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- $\big(f \circ u)' = u'(f' \circ u)$

3.1.3 Dérivées usuelles

Pour toute fonction dérivable u et tout entier relatif n

- $(\cos \circ u)' = -u'(\sin \circ u)$
- $(\sin \circ u)' = u'(\cos \circ u)$
- $(e^u)' = u'e^u$
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
- $(u^n)' = u'nu^{n-1}$
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

3.2 Intégration (de fonctions continues)

L'intégration est "un peu" la réciproque de la dérivée

3.2.1 Interprétation géométrique

— L'intégrale de f entre deux bornes est l'aire sous la courbe
— Graphique
— Exemple : $\displaystyle\int_a^b 3dt = 3(b-a)$

3.2.2 Primitive

— $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est dérivable et $F' = f$
— F est *une* primitive de f
— F est *la* primitive de f qui s'annule en 0
— $G(x) = \displaystyle\int_1 2^x f(t)dt$ est une autre primitive de f : la différence avec F est $\int_0^1 2f(t)dt$ (une constante)
— Relation fondamentale : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ pour n'importe quelle primitive F de f

3.2.3 Primitives usuelles

— $\cos \circ u \leftarrow -u'(\sin \circ u)$
— $\sin \circ u \leftarrow u'(\cos \circ u)$
— $e^u \leftarrow u'e^u$
— $\ln |u| \leftarrow \frac{u'}{u}$
— $u^n \leftarrow u'nu^{n-1}$
— $\sqrt{u} \leftarrow \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Comment se servir de ces formules :
— On regarde chaque morceau "u" de f un à un et on le dérive (u')
— On cherche chacun de ces u' dans f
— Quand on a trouvé u et u' dans f, leur configuration permet de déduire la primitive F à partir des primitives usuelles

3.2.4 Vérification obligatoire

— Trouver une primitive n'est pas facile. Il faut absolument vérifier si la proposition est bonne : en la dérivant, on doit retrouver f

Dérivées et Primitives - Exercices

Base

Exercice 1 Dérivation Donnez l'ensemble de définition des fonctions suivantes, l'ensemble de dérivabilité et calculer leur dérivées respectives :

1. $f(x) = x + 3 - \frac{1}{2x+2}$
2. $f(x) = \sqrt{x} + 2 + \frac{1}{\sqrt{x}-4}$
3. $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x^2-1}$
4. $f(x) = \sin(4x)\cos(4x)$

Exercice 2 Etude de fonction Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Etablir l'ensemble de définition
2. Chercher la parité pour réduire le domaine d'étude
3. Calculer la dérivée et établir son domaine de définition
4. Etablir le tableau des variations
5. Calculer les valeurs des maximums et minimums locaux
6. Calculer les limites aux bornes des intervalles de définition
7. Tracer un graphique approximatif

Exercice 3 Intégration Donnez l'ensemble de définition et calculez une primitive des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
2. $f(x) = \cos(2x+3)$

Donnez l'ensemble de définition de la fonction et calculez la valeur exacte des ces intégrales :

3. $$\int_1^e \frac{1}{t} dt$$
4. $$\int_{-2}^{-1} \frac{t^3+t+1}{t} dt$$

Renforcement

Exercice 4 Dérivation Donnez l'ensemble de définition des fonctions suivantes, l'ensemble de dérivabilité et calculer leur dérivées respectives :

1. $f(x) = e^{3x^2+5}$
2. $f(x) = \ln(\sin(2x))$
3. $f(x) = \frac{e^{5x}}{\sqrt{\sin(3x)}}$
4. $f(x) = \sqrt{\frac{3-6x}{x^2+1}}$

Exercice 5 Etude de fonction Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$.

1. Etablir le domaine de définition
2. Calculer la dérivée et établir son domaine de définition
3. Montrer que la dérivée de f a le même signe, sur $]1;+\infty[$, que la fonction g de l'exercice 2.
4. En notant α le zéro de g, en déduire alors le tableau des variations de f
5. Tracer un graphique approximatif

Exercice 6 Intégration Donnez l'ensemble de définition et calculez une primitive des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin(-x+5)$

Donnez l'ensemble de définition de la fonction et calculez la valeur exacte des ces intégrales :

2. $$\int_{-1}^{+1} \frac{e^t}{e^t+1} dt$$
3. $$\int_0^{\pi} \sin(t) e^{\cos(t)} dt$$
4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\cos(t) dt$$

Réponses

Réponse 1 Dérivation

1. $1 + \frac{2}{(2x+2)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
2. $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)^2}$ sur $\mathbb{R}_\star^+ \setminus \{16\}$
3. $\frac{2x^2-8x+2}{(x^2-1)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
4. $4\cos^2(4x) - 4\sin^2(4x)$ sur $\mathbb{R}$

Réponse 2 Etude de fonction

1. C'est une fonction polynomiale : elle est définie sur $\mathbb{R}$.
2. En écrivant $f(-x) = -x^3+3x-4$, on constate que cela ne ressemble ni à $f(x)$, ni à $-f(x)$: à priori, la fonction ne sera ni paire, ni impaire. On peut confirmer ceci en vérifiant que $f(-2) \neq \pm f(2)$.
3. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. C'est encore une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$
4. On voit que f' est négative sur l'intervalle $]-1;+1[$ et positive ailleurs.
5. $f(-1) = -2$, $f(1) = -6$
6. $\lim_{-\infty} = -\infty$, $\lim_{+\infty} = +\infty$

Réponse 3 Intégration

1. $\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$ sur $\mathbb{R}_\star$
2. $\frac{1}{2}\sin(2x+3) + C$ sur $\mathbb{R}$
3. 1 sur $\mathbb{R}_\star$
4. $10/3 - \ln(2)$ sur $\mathbb{R}_\star$

Réponse 4 Dérivation

1. $6xe^{3x^2+5}$ sur $\mathbb{R}$
2. $\frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}$ sur $]0;\frac{\pi}{2}[$, modulo π
3. $e^{5x}\frac{5\sin(3x)-\frac{3}{2}\cos(3x)}{\sin(3x)\sqrt{\sin(3x)}}$ sur $]0;\pi/3[$, modulo $[\frac{2}{3}\pi]$
4. $\frac{3x^2-3x-3}{(x^2+1)^2}\sqrt{\frac{x^2+1}{3-6x}}$ sur $]-\infty;1/2[$

Réponse 5 Etude de fonction

1. C'est une fraction de polynômes : la fonction est définie partout sauf aux zéros du dénominateur (± 1).
2. $f'(x) = \frac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2}$ sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+1[\cup]+1;+\infty[$
3. Le dénominateur est un carré, donc toujours positif (ou nul) et au numérateur on reconnaît $xg(x)$.
4. On sait que $g \geqslant 0$ sur $]\alpha;+\infty[$ et que f' est du signe de $xg(x)$. On a donc f décroissante entre 0 et α et croissante ailleurs.

Réponse 6 Intégration

1. $\cos(-x+5)+C$ sur $\mathbb{R}$
2. $\ln(\frac{e+1}{e^{-1}+1})$ sur $\mathbb{R}$
3. $e^1 - e^{-1}$ sur $\mathbb{R}$
4. $1/4$ sur $\mathbb{R}$

4 Nombres complexes (3h)

Utilisés, par exemple, pour les grandeurs ayant une phase et une amplitude ; ce qui est trop d'information pour un seul nombre réel

4.1 Présentation

- $\mathbb{C} = \{z = a + ib\ ;\ a \in \mathbb{R},\, b \in R,\, i^2 = -1\}$
- a : partie réelle de z, b : partie imaginaire de z
- Crées pour pouvoir écrire toutes les racines des polynômes (ex : $x^2 + 1 = 0$)
- La formule générale des racines de $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ est $z_{1/2} = \dfrac{-\beta \pm \delta}{2\alpha}$, où δ est un nombre, éventuellement complexe, tel que $\delta^2 = b^2 - 4ac$ (*i.e.* Δ)

4.2 Algèbre

Les nombres complexes sont munis d'une opération transparente sur les réels : la conjugaison $\bar{z} = a - ib$
- $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
- $z_1 * z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$
- $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $z + \bar{z} = 2a = 2\text{Re}\, z$
- $z - \bar{z} = 2ib = 2i\text{Im}\, z$

Remarques :
- Une équation de premier degré à coefficients complexes $az + b = 0$ se résout comme avant mais en séparant les parties réelles et imaginaires, sous forme d'un système :
  $\begin{cases} \text{Re}\,(az+b) = 0 \\ \text{Im}\,(az+b) = 0 \end{cases}$
- Une équation du second degré à coefficients complexes $az^2 + bz + c$ se résout comme avant mais aura probablement un Δ complexe et on verra en 4.4 comment calculer un δ tel que $\delta^2 = \Delta$
  Rappels : $\Delta = (b^2 - 4ac)$ et $z = \dfrac{-\beta \pm \delta}{2\alpha}$, avec $\delta^2 = \Delta$

4.3 Géométrie

- $z = a + ib$ s'identifie au vecteur $\overrightarrow{OZ}$, où O est l'origine et Z le point du plan d'affixe $(a; b)$
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$: longueur du vecteur associé (module de z)

— $\bar{z} = a - ib$: symétrique de z par rapport à l'axe horizontal (conjugué de z)

4.4 Trigonométrie

— Formule d'Euler : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$
— Représentation trigonométrique : $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |z|$ et $\theta = \arctan(\frac{b}{a})[\pi]$ (on vérifie avec la représentation géométrique si on doit prendre $\arctan(\frac{b}{a})$ ou $\arctan(\frac{b}{a}) - \pi$)
— ρ est toujours le module (la longueur), $\theta \in [-\pi\ ;\ \pi]$ est appelé l'argument (l'angle par rapport au vecteur $\overrightarrow{01}$)
— Cette représentation rend la multiplication et la division plus intuitives :
  — $z_1 z_2 = (\rho_1 \rho_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
  — $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$
— De même, cette représentation rend la mise en puissance plus facile : si $z = \rho e^{i\theta}$, alors $z^x = \rho^x e^{i\theta x}$
— En particulier, elle permet de calculer une sorte de racine carrée : si $\Delta = \rho e^{i\theta}$, alors $\delta = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$ est tel que $\delta^2 = \Delta$
— Cas particulier important : si $\Delta < 0$, alors $\delta = i\sqrt{|\Delta|}$ est tel que $\delta^2 = \Delta$

Remarques :
— Le nombre δ ainsi calculé n'est pas appelé LA racine (carrée) de Δ par-ce qu'il y a d'autres choix possibles, aucun n'étant meilleur qu'un autre et aucun n'étant parfaitement satisfaisant ; mais il suffira parfaitement pour nos besoins ici et tant pis pour l'insatisfaction des Mathématiciens.

Nombres Complexes - Exercices

Base

Exercice 1 Forme algébrique

1. Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

   a) $z = (2-6i) - 3(2-2i)$ b) $z = (2-6i) + i(2-2i)$

2. Résoudre (par identification) dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z - (5+2i)\bar{z} = 2z - 5i$.
3. Déterminer les parties réelle et imaginaire des complexes suivants :

   a) $z = \frac{1-3i}{2+5i}$ b) $z = 1 + \frac{1}{i}$

Exercice 2 Forme trigonométrique Ecrivez les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

1. $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
2. $z = -5$

Exercice 3 Interprétation géométrique Avec $z = x + iy$, x et y étant réels, soit f une fonction définie de $\mathbb{C} \setminus 1$ dans $\mathbb{C}$ par

$$f(z) := \frac{z-i}{z-1}.$$

1. Déterminer les parties réelle et imaginaire de $f(z)$ en fonction de x et y.
2. Déterminer l'ensemble E de points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel.

Exercice 4 Equations Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $-2z^2 + 6z - 5 = 0$
2. $\frac{1}{2}z^2 + \sqrt{2}z - \sqrt{3}i = 0$

Renforcement

Exercice 5 Forme algébrique

1. Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

a) $z = \frac{1+i}{1-3i}$ b) $z = (1-2i)^2$

2. Montrer que le nombre $z = (1+2i)(2-3i)(2+i)(3-2i)$ est réel.
3. Déterminer les parties réelle et imaginaire du nombre complexe suivant : $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$

Exercice 6 Forme trigonométrique Ecrivez les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

1. $z = \frac{3}{2}i$
2. $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^2$.

Exercice 7 Interprétation géométrique On reprend ici la suite de l'exercice 3, avec encore $z = x+iy$.

1. Trouver r tel que $x(x-1) + y(y-1) + r^2 = (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2$.
2. Montrer que $(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 = \left|z - \frac{1+i}{2}\right|^2$.
3. En combinant les deux questions précédentes, déduire l'ensemble G des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.
4. Dans le même ordre d'idées, quel est l'ensemble des points z tels que $|z-3|^2 = 2$?

Exercice 8 Equations Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(z^2+9)(z^2-6z+9) = 0$
2. $z^3 + 6z^2 + 13z = 0$
3. $9\sqrt{3}z^2 + \frac{3i}{\sqrt{2}}z + \frac{i}{8}$

Réponses

Réponse 1 Forme algébrique

1. a) z = -4 b) z = 4-4i
2. $z = \frac{5}{14} - \frac{15}{14}i$.
3. a) $\Re(z_1) = -\frac{13}{29}, \Im(z_1) = -\frac{11}{29}$ b) $\Re(z_2) = 1, \Im(z_2) = -1$

Réponse 2 Forme trigonométrique

1. $z = 2e^{\frac{3i\pi}{4}}$
2. $z = 5e^{i\pi}$

Réponse 3 Interprétation géométrique

1. $f(z) = \frac{x(x-1)+y(y-1)}{x^2+1-2x+y^2} + i\frac{-x-y+1}{x^2+1-2x+y^2}$
2. c'est la droite d'équation $y = 1-x$.

Réponse 4 Equations

1. $\left\{\frac{3+i}{2}; \frac{3-i}{2}\right\}$
2. $\left\{-(\sqrt{2}+\sqrt{3})-i; -\sqrt{2}+\sqrt{3}+i\right\}$

Réponse 5 Forme algébrique

1. a) $z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ b) $z = -3 - 4i$
2. $z = 65$
3. $\Re(z_3) = -1, \Im(z_3) = 0$

Réponse 6 Forme trigonométrique

1. $z = \frac{3}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}$
2. $z = 2e^{\frac{7i\pi}{6}}$.

Réponse 7 Interprétation géométrique

1. $x(x-1) + y(y-1) + \frac{1}{2} = (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2$
2. Il suffit d'appliquer la formule pour le module.
3. Si $x(x-1) + y(y-1) = 0$, on trouve donc que $(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 = \frac{1}{2} = \left|z - \frac{1+i}{2}\right|^2$. Ceci est le cercle de centre $(0.5, 0.5)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. C'est le cercle de centre 3 et de rayon $\sqrt{2}$.

Réponse 8 Equations

1. $\{3, 3i, -3i\}$
2. $\{-3-2i; -3+2i; 0\}$
3. $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{36} + i\left(\frac{3-\sqrt{6}}{36}\right); \frac{\sqrt{3}}{36} - i\left(\frac{3+\sqrt{6}}{36}\right)\right\}$

5 Probabilités (3h)

On s'intéresse aux réalisations d'événements.

5.1 Définition

— Ω : $\{\textit{événements}\}$
— $\mathbb{P} : \Omega \mapsto [0\,;\,1]$
— $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
— $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

5.2 Evénements

— Incompatibles : $\mathbb{P}(A \text{ et } B) = 0$
— Indépendants : $\mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$
— Contraires : $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$

5.3 Cas général

— $\mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \text{ ou } B)$
— $\mathbb{P}(A \text{ ou } B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \text{ et } B)$

5.4 Famille complète d'événements

— $\mathbb{P}(A_i \cap A_{j \neq i}) = 0$ et $\mathbb{P}(\cup_{i=1,2\ldots} A_i) = 1$

5.5 Probabilités conditionnelles

— Définition : $\mathbb{P}(A/B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \text{ et } B)}{\mathbb{P}(B)}$
— Conséquence : $\mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A/B)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/A)\,\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } A \text{ et } B \text{ sont incompatbiles} \\ \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \text{ si } A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \end{cases}$
— Propriété : $\mathbb{P}\left(\overline{A}/B\right) = 1 - \mathbb{P}(A/B)$
— Formule de bayes : $\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(B/\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)}$

— Une manière de lire le "sachant que" serait "parmi". Exemples :

- — $\mathbb{P}$ (Blanc et Rond) = 25/90
- — $\mathbb{P}$ (Blanc / Carré) = 12/50
- — $\mathbb{P}$ (Rond / Noir) = 15/53
- — ...

	Blanc	Noir	
Carré	12	38	50
Rond	25	15	40
	37	53	90

Probabilités - Exercices

Base

Exercice 1 Probabilités

1. Un récepteur cellulaire présente trois sites A, B, C, de fixation d'un anticorps. Le site A a deux fois plus de chances d'être atteint par l'anticorps que le site B, et le site B a deux fois plus de chances que le site C.

   Pour chacun des sites, exprimez les probabilités que l'anticorps l'atteigne.
2. On jette deux dés. Quelle est la probabilité que l'on ait obtenu au moins un "1" ?
3. Quel est le plus probable : obtenir au moins une fois un "1" en lançant quatre fois de suite un dé, ou obtenir au moins une fois un double "1" en lançant 26 fois de suite deux dés ?
4. Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5. On en prend deux simultanément au hasard. On constate que l'une d'elles porte le numéro 2. Quelle est la probabilité que le total soit supérieur ou égal à 4 ?
5. Une urne contient trois boules blanches et deux boules noires. On tire simultanément deux boules. Les événements "les deux boules tirées sont blanches" (B) et "les deux boules tirées sont noires" (N) sont-ils indépendants ou incompatibles ?

Exercice 2 Comprendre les faux positifs – Probabilités conditionnelles On s'intéresse à une maladie, par exemple la tremblote du gros orteil, et à l'interprétation des résultats d'un test de dépistage. Il de notoriété publique que la tremblote du gros orteil touche 0.1% de la population. Par ailleurs, il existe pour ce type de maladie un test de dépistage rapide pour lequel on annonce 3% de faux positifs (si on n'est pas malade, il y a 3% de chances que le test soit tout de même positif) et 10% de faux négatifs (si on est malade, il y a 10% de chances que le test soit tout de même négatif).

1. Calculez la probabilité d'être malade et d'avoir un test positif.
2. Calculez le pourcentage de tests positifs.
3. Calculez la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.
4. Calculez la probabilité de ne pas être malade sachant que le test est négatif.

Exercice 3 Probabilités conditionnelles

1. Des études sur de très nombreux prélèvements d'une solution pharmaceutique ont démontré que la probabilité d'y rencontrer des bactéries est égale à 0,52, la probabilité d'y trouver des champignons est égale à 0,36 et la probabilité d'y trouver les deux est égale à 0,1872 (très précisément). On étudie un prélèvement.
   a) La présence de bactéries est-elle indépendante de la présence de champignons ?
   b) Dans un prélèvement pharmaceutique on a observé des bactéries. Quelle est la probabilité qu'il contienne des champignons ?

2. Une urne contient 20 boules blanches et 30 boules noires. On tire successivement et *sans remise* trois boules. Quelle est la probabilité pour que la première soit noire, la deuxième blanche et la troisième noire ?
3. Dans un magasin, on vend des DVD qui proviennent exclusivement de deux usines (A et B). 75% des DVD viennent de l'usine A et, parmi eux, 5% présentent un défaut. Parmi ceux qui viennent de l'usine B, 15% présentent un défaut. Un client achète un DVD. Quelle est la probabilité qu'il présente un défaut ?
4. Un milieu biologique risque d'être pollué par deux bactéries $B1$ ou $B2$. Ces deux sources de pollution sont indépendantes mais compatibles entre elles. Au cours d'une journée, la probabilité que le milieu soit pollué par la bactérie $B1$ est de 0.08 et la probabilité qu'il le soit par la bactérie $B2$ est de 0.04. Déterminer la probabilité pour que le milieu soit pollué :
   a) au cours d'une journée ;
   b) au bout de 2 jours ;
   c) après n jours.
   d) Quelle est la valeur de n à partir de laquelle la probabilité pour que le milieu soit pollué devient supérieure à 0.5 ?

Renforcement

Exercice 4 Probabilités

1. On lance en l'air trois pièces de monnaie identiques, non truquées, et l'on observe le nombre de *pile* obtenu.
   a) Définir Ω, l'ensemble des événements élémentaires de cet exercice.
   b) Calculer les probabilités associées à chacun des événements élémentaires de Ω.
   c) Calculer la probabilité d'obtenir "3 *pile* ou 3 *face*".

Exercice 5 Probabilités conditionnelles

1. Un meuble de rangement comporte trois tiroirs. On cherche un vêtement dedans. Pour chacun des trois tiroirs, la probabilité que ce vêtement s'y trouve est de 31%.
   a) Quelle est la probabilité que le vêtement ne se trouve pas dans le meuble ?
   b) On a fouillé en vain les deux premiers tiroirs. Quelle est la probabilité que le vêtement se trouve dans le troisième tiroir ?
2. Dans un lycée, 20% de garçons et 12% de filles étudient la biologie. Il y a dans ce lycée autant de filles que de garçons.
   a) On choisit un élève au hasard et on constate qu'il étudie la biologie. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?
   b) Même question lorsque, choisissant un élève au hasard, on constate qu'il n'étudie pas la biologie ?
3. Dans une expérience de chimie combinatoire, on fait réagir les 20 acides aminés avec quatre sucres (notés A, B, C, D), afin de synthétiser toutes les molécules résultant de la combinaison d'un acide aminé et d'un sucre. Pour simplifier, on supposera qu'in n'existe qu'une seule façon de faire réagir un acide aminé sur un sucre et que, quel que soit le sucre, ces réactions sont équiprobables. Si l'on extrait au hasard une molécule du mélange, quelle est la probabilité :
   a) qu'elle contienne l'un des deux acides aminés aromatiques tryptophane ou phénylalanine ?

b) qu'elle contienne le sucre A ?
c) qu'elle soit la molécule composée de tryptophane et du sucre A ?
d) qu'elle contienne soit un tryptophane, soit un sucre A ?

4. Une maladie M affecte 0.5% de la population. On observe que 80% des malades possèdent un allèle spécifique du gène G, qui n'est présent que dans 12% de la population globale. On souhaite utiliser la présence de l'allèle du gène G afin de conclure sur une prédisposition à développer la maladie M.
   a) Quelle est la probabilité qu'un sujet développe la maladie s'il a l'allèle du gène G ?
   b) Quelle est la probabilité q'un sujet développe la maladie M s'il n'a pas l'allèle du gène G ?
   c) Quelle est la proportion de gens qui ont l'allèle du gène G et qui ne développent pas la maladie M ?

Réponses

Réponse 1 Probabilités

1. $\mathbb{P}(A) = 4/7$; $\mathbb{P}(B) = 2/7$; $\mathbb{P}(C) = 1/7$.
2. $\mathbb{P}(\text{tout sauf 1}) = (5/6)^2 \implies \mathbb{P}(\text{au moins un 1}) = 0.305$
3. $\mathbb{P}(\text{tout sauf 1}) = (5/6)^4 \implies \mathbb{P}(\text{au moins un 1}) = 0.517$,
   $\mathbb{P}(\text{tout sauf double 1}) = (35/36)^{26} \implies \mathbb{P}(\text{au moins un double1}) = 0.519$.
4. En comptant les cas favorables sur les cas possibles, on trouve $\mathbb{P}_{(A=2)}(A + B \geqslant 4) = 3/4$.
5. Par calcul on trouve $\mathbb{P}(B \cap N) = 0 \neq \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(N)$. On a donc des événements incompatibles et pas indépendants (logique puisque par incompatibilité, si j'ai l'un, je ne peux pas avoir l'autre : ils sont donc particulièrement dépendants).

Réponse 2 Comprendre les faux positifs – Probabilités conditionnelles

1. $\frac{90}{100} \cdot \frac{0.1}{100} = 0.0009$
2. Formule des probabilités totales : $\frac{90}{100} \cdot \frac{0.1}{100} + \frac{3}{100} \cdot \frac{99.9}{100} = 0.03087$, soit 3.087%.
3. Formules de Bayes : $\frac{0.0009}{0.03087} = 0.029$
4. $\frac{0.96903}{0.96913} = 0.99989$

Un test de dépistage sert donc généralement à "garantir" qu'on n'est pas malade s'il est négatif, mais ne dit pas grand chose s'il est positif (il faut faire des tests plus poussés).

Réponse 3 Probabilités conditionnelles

1. a) $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 0.1872 = \mathbb{P}(B \cap C)$: indépendance.
   b) Par indépendance, $\mathbb{P}_B(C) = \mathbb{P}(C) = 0.36$
2. $\mathbb{P}(N_3 \cap B_2 \cap N_1) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(B_2)\mathbb{P}_{(B_2 \cap N_1)}(N_3) = 29/196$.
3. En combinant la formule des probabilités totales et la définition de probabilité conditionnelle, on trouve que $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}_{U_1}(D)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}_{U_2}(D)\mathbb{P}(U_2) = 0.075$
4. B_1 : "pollution par la première bactérie", B_2 : "pollution par la deuxième bactérie".
   a) P_i : "pollution au cours d'une journée quelconque". $\mathbb{P}(P_i) = \mathbb{P}(B_1 \cup B_2) = 0.1168$
   b) A_2 : "pollution au bout de deux jours". $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(P_1 \cup [\overline{P_1} \cap P_2]) = 0.220$
   c) A_n : "pollution au bout de n jours". $\mathbb{P}(A_n) = 1 - \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \cdots \cap \overline{P_n}) = 1 - 0.8832^n$
   d) $1 - 0.8832^n > 0.5 \equiv n > \frac{\ln 0.5}{\ln 0.8832}$ car les ln sont négatifs ! (ce qui est vrai à partir de $n = 6$)

Réponse 4 Probabilités

1. a) On définit P_i : "on a obtenu i fois *pile*" ; alors $\Omega = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$.
   b) Pour chaque pièce, la probabilité de faire *pile* est de 0.5. Ainsi, la probabilité de n'avoir que des *face* est $\mathbb{P}(P_0) = 1/8$.
   Si on a deux *face* et un *pile*, le *pile* peut être obtenu sur la première, la seconde ou la troisième pièce : $\mathbb{P}(P_1) = 3/8$.
   En intervertissant les mots *pile* et *face*, on trouve $\mathbb{P}(P_2) = 3/8$.
   De même, on n'a qu'une façon d'avoir trois *pile* : $\mathbb{P}(P_3) = 1/8$.
   c) $\mathbb{P}(P_3 \cup P_0) = 1/4$.

Réponse 5 Probabilités conditionnelles

1. a) Le vêtement est dans un seul des trois tiroirs, ou dans aucun. En notant T_i l'événement "le vêtement est dans le tiroir i" et $\emptyset$ l'événement "le vêtement n'est dans aucun tiroir", on voit qu'on obtient quatre événements incompatibles mais qui couvrent l'ensemble des possibilités : c'est une famille complète d'événements. On peut alors faire un camembert pour voir immédiatement que $\mathbb{P}(\emptyset) = 7\%$.
   b) Avec la même famille complète et le même camembert, on voit aussi que
   $$\mathbb{P}\big(T_3/[\overline{T_1} \text{ et } \overline{T_2}]\big) = \frac{\mathbb{P}(T_3 \text{ et } \overline{T_1} \text{ et } \overline{T_2})}{\mathbb{P}(\overline{T_1} \text{ et } \overline{T_2})} = \frac{\mathbb{P}(T_3)}{\mathbb{P}(T_3) + \mathbb{P}(\emptyset)} = 31/38 = 0.815.$$
   Ceci montre au passage que T_3 n'est pas indépendant de $[T_1$ ou $T_2]$.
2. a) $\mathbb{P}(G/B) = 0.625$
   b) $\mathbb{P}(G/\overline{B}) \approx 0.476$
3. 20 acides et 4 sucres : 80 combinaisons
   a) $\mathbb{P}(T) = 4/80$, $\mathbb{P}(Ph) = 4/80$, $\mathbb{P}(T \cup Ph) = 1/10$ car T et Ph sont incompatibles
   b) $\mathbb{P}(A) = 20/80$
   c) Par indépendance des deux événements, $\mathbb{P}(T \cap A) = 1/80$
   d) $\mathbb{P}(T \cup A) = 23/80$
4. $\mathbb{P}(M) = 0.005$, $\mathbb{P}(G) = 0.12$, $\mathbb{P}(G/M) = 0.8$
   a) $\mathbb{P}(M/G) = \frac{\mathbb{P}(M \cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}(G/M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(G)} = 3.3\%$
   b) $\mathbb{P}(M/\overline{G}) = \frac{\mathbb{P}(M \cap \overline{G})}{\mathbb{P}(\overline{g})}$.
   Or, $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(M \cap G) + \mathbb{P}(M \cap \overline{G})$ car $\{G, \overline{G}\}$ forme une famille complète d'événements.
   Ainsi, $\mathbb{P}(M/\overline{G}) = \frac{0.005-0.004}{0.88} \approx 0.001136$
   c) Par la même méthode avec $\{M, \overline{M}\}$, on trouve $\mathbb{P}(G \cap \overline{M}) = 0.116$.