



E.T.S. DE INGENIEROS EN TOPOGRAFÍA  
GEODESIA Y CARTOGRAFÍA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

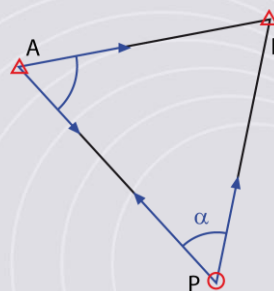
## Introducción

- Procedimiento combinado de los dos modos de intersección vistos hasta ahora
- Introducción de medidas de distancia añadida al método
- Posibilidades de resolución muy variadas
- Apoyadas en la resolución matemática de problemas geométricos
- Método también llamado *lateral*
- Dos variantes:
  - Intersección mixta simple con observaciones angulares
  - Intersección mixta simple con observaciones angulares y de distancia

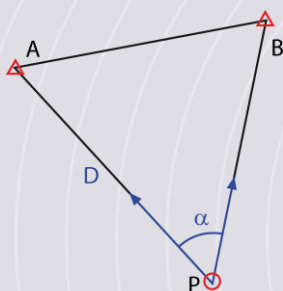


### Intersección mixta simple con observaciones angulares

- Consiste en:
  - Una observación directa desde un punto de coordenadas conocidas  $A$
  - Una observación inversa desde el punto desconocido  $P$
- Los ángulos obtenidos en campo:  $A$  y  $\alpha$
- Se tiene un triángulo conocida la base y dos ángulos
- No ofrece comprobación de los resultados



### Intersección mixta simple con observaciones angulares y de distancia

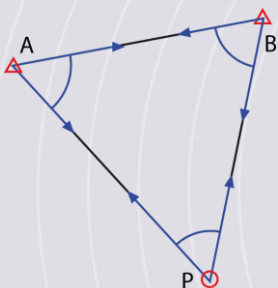


- Observación en campo del ángulo  $\alpha$  y la medida de la distancia entre  $A$  y  $P$
- Se tienen dos lados y un ángulo del triángulo
- Fácil determinación de las coordenadas de  $P$
- Tampoco se tiene comprobación de los resultados



### Intersección mixta múltiple. Soluciones numéricas

- Para asegurar resultados → Más observaciones de las necesarias



- Caso más sencillo → tres ángulos del triángulo:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{P} = 200^g$$

$$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{P}) - 200^g = E_c$$

- Teniendo en cuenta que se han realizado seis observaciones:

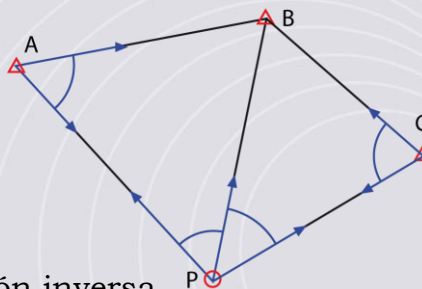
$$T = \sigma_a \cdot \sqrt{6} \geq E_c$$

- Si resulta admisible, se compensará entre los tres ángulos a partes iguales



### Intersección mixta múltiple. Soluciones numéricas

- Otro caso:
  - Observación desde  $P$  a un tercer vértice, el  $C$
  - Manteniendo la observación desde  $A$



- Las coordenadas de  $P$  puede obtenerse por dos caminos:
  - Resolución de un trisección inversa
  - Por alguna de las dos mixtas que existen
- Si además se observó desde  $C$ , se aportan dos nuevas soluciones, otra mixta y una directa



## Intersección mixta múltiple. Soluciones numéricas

- El problema se resolverá de diferente manera en función del tipo de observación
- Si hay distancias, el caso más sencillo será aquel en que se miden las distancias  $PA$  y  $PB$ : Se tendrán los tres lados y un ángulo, el  $\alpha$ , obteniendo, las coordenadas de  $P$  mediante
  - La resolución de un triángulo conocidos tres lados
  - A través de dos triángulos en los que se conocen dos lados y un ángulo
- Con la incorporación de distancias hay sobreabundancia de datos y la resolución ha de abordarse desde los MM.CC.



## Intersección mixta por MM.CC.

- Tres tipos de ecuaciones de observación:
  - De dirección directas

$$V_1 = \frac{r^{cc}}{D^2} \cdot (\Delta N_A^P \cdot \partial E_P - \Delta E_A^P \cdot \partial N_P) + \theta_{cal} - \theta_{obs}$$

- De dirección inversas

$$V_1 = \frac{r^{cc}}{D^2} \cdot (-\Delta N_P^A \cdot \partial E_P + \Delta E_P^A \cdot \partial N_P) - \partial \Sigma + \theta_{cal} - \theta_{obs}$$

- De distancias





## Intersección mixta por MM.CC.

- Forma de la ecuación de distancia:

$$V = \text{Corrección} + D_{\text{cal}} - D_{\text{obs}}$$

- Se pretenden obtener las coordenadas ajustadas, no las distancias
- Relación entre distancias y coordenadas:

$$D_A^P = \sqrt{(E_P - E_A)^2 + (N_P - N_A)^2}$$

- Es no lineal: no puede formar un sistema de ecuaciones



## Intersección mixta por MM.CC.

- Linealización por desarrollo en serie de Taylor, despreciando términos de segundo orden
- Se va a derivar respecto de las dos incógnitas
- Forma general:

$$y = u^n \qquad y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

- Particularizando:

$$(D_A^P)^2 = (D_P^A)^2 = (E_P - E_A)^2 + (N_P - N_A)^2$$

$$2 \cdot D \cdot \partial D = 2 \cdot (E_P - E_A) \cdot \partial (E_P - E_A) + 2 \cdot (N_P - N_A) \cdot \partial (N_P - N_A)$$



### Intersección mixta por MM.CC.

$$\partial D = \frac{2 \cdot (E_P - E_A)}{2 \cdot D} \cdot \partial (E_P - E_A) + \frac{2 \cdot (N_P - N_A)}{2 \cdot D} \cdot \partial (N_P - N_A)$$

$$\partial D = \frac{(E_P - E_A)}{D} \cdot \partial E_P - \frac{(E_P - E_A)}{D} \cdot \partial E_A + \frac{(N_P - N_A)}{D} \cdot \partial N_P - \frac{(N_P - N_A)}{D} \cdot \partial N_A$$

- Volviendo a la fórmula general:

$$V = \partial D_P^A + D_{P_{cal}}^A - D_{P_{obs}}^A$$

- $D_{cal}$  se obtiene de las coordenadas aproximadas de  $P$  y las correspondientes del vértice considerado fijo
- Residuo, términos independiente e incógnitas están expresados en metros



### Intersección mixta por MM.CC.

- Si el punto fijo es A:

$$\partial D = \frac{1}{D} \cdot [(E_P - E_A) \cdot \partial E_P + (N_P - N_A) \cdot \partial N_P]$$

- Para que todo el sistema tenga las mismas unidades: se transforma  $\partial D$  en valor angular, multiplicando por  $r^{cc}/D$ :

$$\partial D = \frac{r^{cc}}{D^2} \cdot [(E_P - E_A) \cdot \partial E_P + (N_P - N_A) \cdot \partial N_P]$$

- Quedando:

$$V = \frac{r^{cc}}{D^2} \cdot [(E_P - E_A) \cdot \partial E_P + (N_P - N_A) \cdot \partial N_P] + \frac{r^{cc} \cdot (D_{cal} - D_{obs})}{D}$$



## Solución en proyección UTM

- Con observaciones angulares, las coordenadas obtenidas están en el mismo sistema que las de los vértices
- Pero las distancias de observación son distancias geométricas
- Hay que transformarlas en distancias UTM:
  - Reducir la distancia geométrica a la superficie de nivel de la estación:

$$D_{r_A} = D_{g_A}^P \cdot \text{sen}(V - \omega) \quad D_{r_P} = D_{g_P}^A \cdot \text{sen}(V - \omega)$$

siendo  $\omega$  la convergencia de las verticales

- Reducir al nivel del mar:  $D_{r_{MAR}} = \frac{D_{r_A} \cdot R}{R + H_A}$
- Reducir a la proyección:  $D_{UTM} = k \cdot D_{r_{MAR}}$



## Los pesos en el cálculo por MM.CC.

- Es habitual considerar unas visuales más fiables que otras, debido a las diferentes distancias entre los puntos
- Cada observación debe ir acompañada de un peso
- En las ecuaciones de dirección, los pesos pueden estimarse en función de las distancias
- Es costumbre establecerlos en razón inversa de  $\sigma_\alpha$ , que ya contempla las distancias
- En las ecuaciones de distancia, los pesos son asignados según el  $\sigma_d$  que también queda influido por la distancia medida



### Los pesos en el cálculo por MM.CC.

- Se entiende el peso como la inversa de la varianza:

$$P = 1/\sigma^2 \quad \rightarrow \quad P = 1/\sigma_a^2 \quad \text{ó} \quad \sqrt{P} = 1/\sigma_a$$

- Se distinguirán:
  - Ecuaciones de dirección
    - Distancias largas                      Distancias cortas
  - Ecuaciones de distancia
    - Distancias largas                      Distancias cortas
  - Ecuaciones de dirección y distancia
    - Distancias largas                      Distancias cortas



### Pesos en las ecuaciones de dirección

- En este caso, los errores son producidos por errores angulares
- Estos errores obedecen a dos causas:
  - El error de dirección  $\sigma_d$ , muy influyente en visuales cortas
  - El error de verticalidad, único a tener en cuenta cuando las visuales son largas
- Ejemplo: Teodolito de  $s=100^{\text{cc}}$  y con errores  $\sigma_e + \sigma_s = 3 \text{ cm}$ :

– Distancia de 500 m:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_d &= \frac{30 \text{ mm}}{500 \cdot 10^3} \cdot r^{\text{cc}} = 38^{\text{cc}} \\ \sigma_v &= \frac{1}{12} \cdot s^{\text{cc}} = 8.3^{\text{cc}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \sigma_a = 39^{\text{cc}}$$

– Distancia de 5000 m:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_d &= \frac{30 \text{ mm}}{5000 \cdot 10^3} \cdot r^{\text{cc}} = 3.8^{\text{cc}} \\ \sigma_v &= \frac{1}{12} \cdot s^{\text{cc}} = 8.3^{\text{cc}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \sigma_a = 9^{\text{cc}}$$





### Pesos en las ecuaciones de dirección: Distancias largas

- Es común admitir en distancias largas un  $\sigma_a$  establecido a priori para todas las observaciones  $\rightarrow$  Todas las visuales tendrán el mismo peso
- Supondría multiplicar a las matrices por un mismo escalar  $\rightarrow$  No modifica los resultados finales
- Otro modo de introducir pesos: Inversamente proporcional al cuadrado de las distancias:

$$P = 1/D^2 \quad \text{ó} \quad \sqrt{P} = 1/D$$

- Pero en la ecuación de dirección, los coeficientes quedan ya muy afectados por las distancias
- Por tanto, puede establecerse:
  - Si el  $\sigma_a$  es el mismo para todas las visuales, resulta inútil introducirlo como peso
  - No parece aconsejable introducir pesos en razón de las distancias



### Pesos en las ecuaciones de dirección: Distancias largas

- Ejemplo: El instrumental y la metodología generan una desviación típica angular igual para todas las visuales  $\sigma_a = 5''$ 
  - Visual a 1 D=1000 m
  - Visual a 2 D=2000 m
  - Visual a 3 D=3000 m
- Se supone  $\theta_1 = 50^\circ \rightarrow \Delta E \cong \Delta N$
- Cálculo de los errores para cada visual:

$$E_{T1} = \sigma_a \frac{D_1}{r^{cc}} = 0.0078 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \Delta E \cong \Delta N \cong 707 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \pm \frac{\Delta E}{D^2} r^{cc} \dots = 450.09$$

$$E_{T2} = \sigma_a \frac{D_2}{r^{cc}} = 0.0157 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \Delta E \cong \Delta N \cong 1414 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \pm \frac{\Delta E}{D^2} r^{cc} \dots = 225.045$$

$$E_{T3} = \sigma_a \frac{D_3}{r^{cc}} = 0.0236 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \Delta E \cong \Delta N \cong 2121.32 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \pm \frac{\Delta E}{D^2} r^{cc} \dots = 150.03$$



### Pesos en las ecuaciones de dirección: Distancias largas

- Análisis de proporcionalidad de coeficientes:

$$\frac{E_{T_1}}{E_{T_2}} = \frac{0.0078}{0.0157} = 0.50 \rightarrow \frac{\Delta E_2}{\Delta E_1} = \frac{225.045}{450.09} = 0.5$$

$$\frac{E_{T_1}}{E_{T_3}} = \frac{0.0078}{0.0236} = 0.33 \rightarrow \frac{\Delta E_3}{\Delta E_1} = \frac{150.030}{450.09} = 0.33$$

$$\frac{E_{T_2}}{E_{T_3}} = \frac{0.0157}{0.0236} = 0.66 \rightarrow \frac{\Delta E_3}{\Delta E_2} = \frac{150.03}{225.045} = 0.66$$

- Por lo tanto, no es necesario ponderar las ecuaciones, puesto que ya lo están (siempre y cuando las desviaciones típicas sean iguales)



### Pesos en las ecuaciones de dirección: Distancias cortas

- En este caso, existirá un  $\sigma_a$  diferente para cada dirección, consecuencia del error de dirección:

$$P = \frac{1}{\sigma_a^2} \quad \text{ó} \quad \sqrt{P} = \frac{1}{\sigma_a}$$

- Observando las unidades, como antes estaban expresadas en segundos, al ser divididas por  $1/\sigma_a^{cc}$ , los nuevos valores son adimensionales
- Los valores de los residuos también serán adimensionales, así como la desviación estándar
- Para obtenerlos en segundos:

$$V_{(\text{adimensional})} = a_1 \cdot \partial x \cdot \sqrt{P} + b_1 \cdot \partial y \cdot \sqrt{P} + (\theta_{cal} - \theta_{obs}) \cdot \sqrt{P}$$

$$V^{cc} = \frac{V_{(\text{adimensional})}}{\sqrt{P}}$$



### Pesos en las ecuaciones de dirección: Distancias cortas

- El instrumental y la metodología generar una desviación típica angular distinta para todas las visuales

$\left. \begin{array}{l} \text{Visual a 1} = 200 \text{ m} \\ \text{Visual a 2} = 400 \text{ m} \\ \text{Visual a 3} = 800 \text{ m} \end{array} \right\}$	$\sigma_e = 0.002 \text{ m}$	$\left. \begin{array}{l} \sigma_v = 5^{\text{cc}} \\ \sigma_p = 2^{\text{cc}}.2 \\ \sigma_l = 5^{\text{cc}} \\ \sigma_d = \text{depende de cada caso} \end{array} \right\}$
	$\sigma_s = 0.005 \text{ m}$	
	$\text{Sensibilidad} = 60^{\text{cc}}$	
	$\sigma_l = 5^{\text{cc}}$ 30 Aumentos	

- Cálculo de los errores para cada visual:

$$\sigma_{d_1} = \frac{0.007}{200} r^{\text{cc}} = 22^{\text{cc}}.28 \rightarrow \sigma_{a_1} = 23^{\text{cc}}.48 \rightarrow E_{T_1} = 0.0074 \text{ m}$$

$$\sigma_{d_2} = \frac{0.007}{400} r^{\text{cc}} = 11^{\text{cc}}.14 \rightarrow \sigma_{a_2} = 13^{\text{cc}}.38 \rightarrow E_{T_2} = 0.0084 \text{ m}$$

$$\sigma_{d_3} = \frac{0.007}{800} r^{\text{cc}} = 5^{\text{cc}}.57 \rightarrow \sigma_{a_3} = 9^{\text{cc}}.27 \rightarrow E_{T_3} = 0.0116 \text{ m}$$



### Pesos en las ecuaciones de dirección: Distancias cortas

- Se supone  $\theta_i = 50^g \rightarrow \Delta E \cong \Delta N$

$\left. \begin{array}{l} \overbrace{\Delta E_1 \cong \Delta N_1}^{\theta_i = 50^g} \cong 141.420 \\ \Delta E_2 \cong \Delta N_2 \cong 282.843 \\ \Delta E_3 \cong \Delta N_3 \cong 565.685 \end{array} \right\} \rightarrow$	$\left. \begin{array}{l} \pm \frac{\Delta E_1}{D^2} r^{\text{cc}} \dots = 2250.77 \\ \pm \frac{\Delta E_2}{D^2} r^{\text{cc}} \dots = 1125.397 \\ \pm \frac{\Delta E_3}{D^2} r^{\text{cc}} \dots = 562.698 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Sin Ponderar}$
	$\left. \begin{array}{l} \pm \frac{\Delta E_1}{D^2} \frac{r^{\text{cc}}}{\sigma_{a1}} \dots = 95.859 \\ \pm \frac{\Delta E_2}{D^2} \frac{r^{\text{cc}}}{\sigma_{a2}} \dots = 84.1103 \\ \pm \frac{\Delta E_3}{D^2} \frac{r^{\text{cc}}}{\sigma_{a2}} \dots = 60.701 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Ponderando}$



### Pesos en las ecuaciones de dirección: Distancias cortas

- Análisis de la proporcionalidad de los coeficientes y los errores transversales:

$$\begin{array}{l}
 E_{T_1} = 0.0074 \text{ m} \\
 E_{T_2} = 0.0084 \text{ m} \\
 E_{T_3} = 0.0116 \text{ m}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \frac{E_{T_2}}{E_{T_1}} = 1.135 \\
 \frac{E_{T_3}}{E_{T_1}} = 1.568 \\
 \frac{E_{T_3}}{E_{T_2}} = 1.381
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 \pm \frac{\Delta E_1}{D^2} r^{cc} \dots = 2250.77 \\
 \pm \frac{\Delta E_2}{D^2} r^{cc} \dots = 1125.397 \\
 \pm \frac{\Delta E_3}{D^2} r^{cc} \dots = 562.698
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \frac{2250.77}{1125.397} = 2 \\
 \frac{2250.77}{562.698} = 4 \\
 \frac{1125.397}{562.698} = 2
 \end{array} \right\}$$
  

$$\begin{array}{l}
 \pm \frac{\Delta E_1}{D^2} \frac{r^{cc}}{\sigma_{a_1}} \dots = 95.859 \\
 \pm \frac{\Delta E_2}{D^2} \frac{r^{cc}}{\sigma_{a_2}} \dots = 84.1103 \\
 \pm \frac{\Delta E_3}{D^2} \frac{r^{cc}}{\sigma_{a_3}} \dots = 60.701
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \frac{95.859}{84.1103} = 1.139 \\
 \frac{95.859}{60.701} = 1.579 \\
 \frac{84.1103}{60.701} = 1.386
 \end{array} \right\}$$



### Pesos en las ecuaciones de dirección: Distancias cortas

- Conclusión: Las observaciones se ponderarán siempre
- Excepción: Cuando sólo existan observaciones angulares y la desviación típica sea la misma para todas las visuales, ya que las observaciones resultarán ponderadas al formularse



### Pesos en las ecuaciones de distancia

- Existen dos factores dominantes en la medida de distancias:
  - El  $\sigma_j$  que en distancias cortas es constante y dominante
  - El término  $a \pm b_{ppm}$  que a largas distancias presenta un factor de proporcionalidad

- Por ejemplo, un distanciómetro de  $5 \text{ mm} \pm 5 \text{ ppm}$ :

- Poligonal o red de 500 m de lado:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_j &= 23 \text{ mm} \\ \sigma_i &= a + b \cdot D_{km} = 5 + 5 \cdot 0.5 = 7.5 \text{ mm} \end{aligned} \right\} \rightarrow \sigma_d = 24 \text{ mm}$$

- Poligonal o red de 5000 m de lado:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_j &= 0 \text{ (centrado forzado)} \\ \sigma_i &= a + b \cdot D_{km} = 5 + 5 \cdot 5 = 30 \text{ mm} \end{aligned} \right\} \rightarrow \sigma_d = 30 \text{ mm}$$



### Pesos en las ecuaciones de distancia: Distancias largas

- y estableciendo el valor del peso como:

$$P = \frac{1}{\sigma_d^2} \quad \text{ó} \quad \sqrt{P} = \frac{1}{\sigma_d}$$

$$V = \frac{\Delta E}{D} \cdot \partial E_p \cdot \frac{1}{\sigma_d} - \frac{\Delta N}{D} \cdot \partial N_p \cdot \frac{1}{\sigma_d} + \frac{D_{cal} - D_{obs}}{\sigma_d}$$

- Ejemplo a dos distancias diferentes:

- Ecuaciones expresadas en segundos:

$$D = 1000 \text{ m} \rightarrow V = \frac{r^{cc}}{D} \cdot \frac{\Delta E}{D} \cdot \partial E_p \cdot 1 + \dots = \frac{r^{cc} \cdot 500}{1000^2} \cdot \partial E = 318.31 \cdot \partial E$$

$$D = 2000 \text{ m} \rightarrow V = \frac{r^{cc}}{D} \cdot \frac{\Delta E}{D} \cdot \partial E_p \cdot \frac{1}{2} + \dots = \frac{r^{cc} \cdot 1000}{2000^2} \cdot \partial E \cdot \frac{1}{2} = 79.57 \cdot \partial E$$

- Ecuaciones expresadas en mm:

$$D = 1000 \text{ m} \rightarrow V = \frac{\Delta E}{D} \cdot \partial E_p \cdot 1 + \dots = \frac{500}{1000} \cdot \partial E = 0.5 \cdot \partial E$$

$$D = 2000 \text{ m} \rightarrow V = \frac{\Delta E}{D} \cdot \partial E_p \cdot \frac{1}{2} + \dots = \frac{1000}{2000} \cdot \partial E \cdot \frac{1}{2} = 0.25 \cdot \partial E$$





### Pesos en las ecuaciones de distancia: Distancias largas

- En las ecuaciones expresadas en segundos, se ve que las ecuaciones con distancias largas quedan muy afectadas en sus coeficientes
- En este caso, la fuerza de la segunda ecuación dentro de la matriz A será la cuarta parte que la primera ecuación, cuando presenta la misma dirección
- De no haber dado peso, la relación entre las dos hubiera sido de un medio lo que resulta lógico ya que una distancia es el doble de la otra
- Se deduce una conclusión muy importante:
  - Si las ecuaciones son originales, deben introducirse pesos
  - Si las ecuaciones se expresan en segundos, no deben introducirse pesos



### Pesos en las ecuaciones de distancia: Distancias cortas

- En este caso, el  $\sigma_j$  es igual para cualquier medida y la introducción de pesos también puede hacerse de dos modos diferentes en función de las unidades que se deseen obtener:

$$\Delta E = 500 \text{ m} \quad D = 500 \text{ m} \quad \sigma_j = 25 \text{ mm}$$

- Planteamiento de la ecuación en m:

$$V = \frac{\Delta E}{D} \cdot \partial E_p \cdot \frac{1}{\sigma_j} + \dots = \frac{500}{500} \cdot \frac{1}{0.025} \cdot \partial E + \dots = 40 \cdot \partial E \dots \text{adimensional}$$

- Planteamiento de la ecuación en segundos:

$$V = \frac{r^{cc} \cdot \Delta E}{D^2} \cdot \partial E_p \cdot \frac{1}{\sigma_j^{cc}} \dots \quad \sigma_j^{cc} = \frac{\sigma_j}{D} \cdot r^{cc}$$

$$V = \frac{r^{cc} \cdot \Delta E}{D^2} \cdot \partial E_p \cdot \frac{D}{\sigma_j \cdot r^{cc}} + \dots = \frac{500}{500} \cdot \partial E \cdot \frac{1}{\sigma_j} = 40 \cdot \partial E \dots$$

- Si el peso es igual para todas las observaciones, resulta inútil introducirlo



## Pesos en las ecuaciones de dirección y distancia

- Cuando las ecuaciones estén entremezcladas, existirá mayor precisión en unas que en otras
- Se podría establecer una relación de proporcionalidad entre ellas
- Dando peso unidad a las ecuaciones de dirección:

$$\sqrt{P_a} = K / \sigma_a = 1 \quad K^{cc} = \sigma_a^{cc} \quad K^{cc} = \sqrt{P_a} \cdot \sigma_a^{cc}$$

- El peso de la ecuación de distancia será:

$$\sqrt{P_d} = K^{cc} / \sigma_d^{cc} \quad \sigma_d^{cc} = \sigma_d / D \cdot r^{cc}$$

$$\sqrt{P_d} = \frac{\sqrt{P_a} \cdot \sigma_a^{cc}}{\sigma_d / D \cdot r^{cc}} = \frac{\sigma_a^{cc}}{\sigma_d} \cdot \frac{D}{r^{cc}} \rightarrow \text{adimensional}$$



## Pesos en las ecuaciones de dirección y distancia

- Suponiendo que se observa una dirección con  $6.36^{cc}$  de  $\sigma_a$  y que la distancia es de 1000 m. Si esta distancia se mide con MED cuyo error sea de  $5 \text{ mm} \pm 5 \text{ ppm}$ , traduciendo ese  $\sigma_d$  en  $\sigma_a$  se tiene:

$$\sigma_d^{cc} = \frac{10 \text{ mm}}{1000 \cdot 10^3} \cdot r^{cc} = 6.36^{cc}$$

luego, las observaciones tienen el mismo peso

- Si el peso en la medida de ángulos es la unidad, el de la medida de distancias será:

$$\sqrt{P_d} = \frac{\sigma_a^{cc}}{\sigma_d} \cdot \frac{D}{r^{cc}} = \frac{6.36^{cc}}{10 \text{ mm}} \cdot \frac{10^6}{r^{cc}} = 1$$



## Pesos en las ecuaciones de dirección y distancia

- Otro modo de asignar pesos, es transformando las ecuaciones en adimensionales:

- Ecuaciones de dirección:

$$V = \frac{\Delta E}{D^2} \cdot \frac{r^{cc}}{\sigma_a^{cc}} \cdot \partial E_p \dots \rightarrow \text{adimensional}$$

- Ecuaciones de distancia:

$$V = \frac{\Delta E}{D} \cdot \frac{1}{\sigma_d} \cdot \partial E_p \dots \rightarrow \text{adimensional}$$

- Aplicando el ejemplo anterior, para  $\Delta E=500 \text{ m}$ , se tienen las dos ecuaciones:

$$V = \frac{500}{1000^2} \cdot \frac{r^{cc}}{6.36^{cc}} \cdot \partial E \dots = 50.0487 \cdot \partial E$$

$$V = \frac{500}{1000} \cdot \frac{1}{0.01} \cdot \partial E \dots = 50 \cdot \partial E$$



## Pesos en las ecuaciones de dirección y distancia

- Conclusión:
  - En largas distancias, si las ecuaciones se expresan en segundos y presentan precisiones parecidas no sirve de nada introducir pesos
  - Cuando se contemplan conjuntamente ecuaciones de dirección y de distancia y se quieren introducir pesos, es más cómodo plantear las mismas en modo adimensional



### Determinación de residuos y precisiones

- Si las ecuaciones están en segundos, los residuos y la desviación típica también estarán en segundos
- Si se tienen ecuaciones adimensionales, al haber introducido pesos en las ecuaciones, los residuos y la desviación típica estarán afectados por éstos y resultarán en modo adimensional
- Es costumbre expresar los residuos con peso unidad, es decir, sin aplicar pesos
- Los residuos tendrán unas unidades u otras según el tipo de ecuación:
  - segundos en las de dirección
  - metros en las de distancia



### Determinación de residuos y precisiones

$$\begin{array}{l}
 \text{Matriz } A \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dirección} \quad \frac{\Delta E \cdot r^{cc}}{D^2} \cdot \frac{1}{\sigma_a^{cc}} \\ \text{distancia} \quad \frac{\Delta E}{D} \cdot \frac{1}{\sigma_d} \end{array} \right. \rightarrow m^{-1} \\
 \text{Matriz } A^T \quad \rightarrow \quad \text{mismas unidades} \quad \rightarrow m^{-1} \\
 \text{Matriz } N = (A^T \cdot A) \quad \rightarrow \quad m^{-2} \\
 \text{Matriz } N^{-1} \quad \rightarrow \quad m^2
 \end{array}$$

- La desviación estándar está en modo adimensional para que esas precisiones aparezcan en metros

$$\sigma_E = \sigma \cdot \sqrt{N_{\alpha,\alpha}^{-1}} \quad \sigma_N = \sigma \cdot \sqrt{N_{\beta,\beta}^{-1}}$$



## Cálculo del factor de escala

- Dos formas de dar factor de escala a la red:
  - Con dos puntos fijos
  - Distancias medidas con MED
- Podrían ser diferentes
- Necesario introducir una variable más en el sistema que controle y permita calcular la diferencia entre ambos factores
- Ejemplos:
  - Que los vértices de la base no tengan la precisión suficiente
  - Que el distanciómetro puede estar mal calibrado e introducir errores sistemáticos en la medida de distancias
- Da idea de la bondad de la escala de la red
- Para introducir la variable factor de escala en las ecuaciones del sistema, se va a suponer que la distancia observada posee un grado de incertidumbre



## Cálculo del factor de escala

- La ecuación de distancia tendría la forma:

$$V = \frac{1}{D} \cdot [(X_p - X_A) \cdot \partial X_p + (Y_p - Y_A) \cdot \partial Y_p] + D_{cal} - D_{obs} - \mu \cdot D_{obs}$$

- Donde  $\mu$  representa la variable factor de escala
- Se puede calcularse a priori para una sola dirección:

$$\mu = \frac{D_{cal} - D_{obs}}{D_{obs}}$$

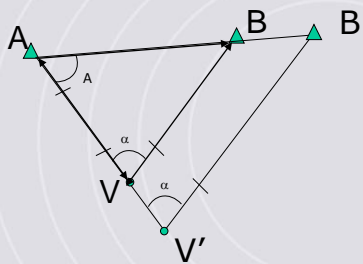
- El factor de escala vendrá expresado como la media de todos los referentes a cada medida
- Su introducción en el sistema de ecuaciones reduce los grados de libertad
- Los resultados finales de las precisiones mejoran con su utilización





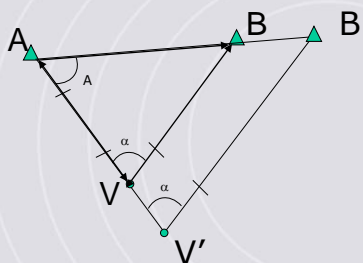
### Cálculo del factor de escala

- Ejemplo: Intersección CON DISTANCIAS múltiple en la que se han realizado las observaciones de dirección y de distancias que aparecen en el siguiente gráfico:
  - La distancia entre los puntos A y B errónea, por ejemplo, 0,10 m mayor que la que realmente existe.
  - El distanciómetro utilizado para la mediada de distancias está mal calibrado y adolece de un error de 300 ppm



### Cálculo del factor de escala

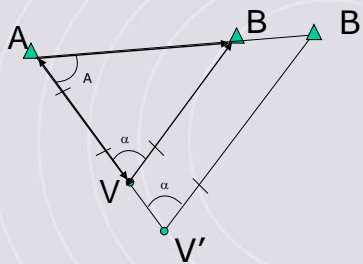
- La distancia entre los puntos A y B es 0,10 m mayor que la que realmente existe.
- En el caso de medir exclusivamente direcciones el punto V pasaría a la situación V', obteniéndose residuos admisibles dado que la figura resultante será semejante a la anterior
- En el caso de medir direcciones y distancias, la escala definida por los puntos fijos entraría en conflicto con la definida por el distanciómetro utilizado para realizar tales observaciones





### Cálculo del factor de escala

- En el caso de que el distanciómetro estuviera mal calibrado y en cada 1000 m midiera 1000,10 m, equivaldría a tener un factor de escala entre la establecida por los puntos fijos y el distanciómetro de 10 ppm
- En cualquier ajuste topográfico donde exista más de un punto fijo (exista transmisión de escala) y se realicen medidas de distancia, se deberá plantear el factor de escala como incógnita
- Con ello, se podrá establecer la proporción existente entre la escala definida entre puntos fijos y la definida por el distanciómetro



### Cálculo del factor de escala

- Utilización de ecuaciones de observación de distancia conjuntamente con las de dirección:
  - Se deberán expresar en las mismas unidades ambas ecuaciones y deberán tener la misma representatividad en el ajuste, a igualdad de precisión
  - Para conseguir estos dos requisitos se introduce la ponderación como criterio homogeneizador

$$\frac{r^{cc}}{(D_E^v)^2} (\Delta N_E^v dE_v - \Delta N_E^v dE_E + \Delta E_E^v dN_E - \Delta E_E^v dN_v) + (\theta_E^v)' - (\Sigma_E + d\Sigma_E + LH_E^v) = v_i$$

$$\frac{1}{(D_E^v)} [\Delta E_E^v dE_v - \Delta E_E^v dE_E + \Delta N_E^v dN_v - \Delta N_E^v dN_E] - \mu (D_E^v)^o + (D_E^v)' - (D_E^v)^o = v_i$$

- Residuos en segundos y metros, respectivamente