

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO      KỲ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA NĂM 2016**

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

**Môn thi: Toán**

(Đề thi có 01 trang)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

<http://dethithu.net>

**Câu I (1,0 điểm)**

1. Cho số phức  $z = 1 + 2i$ . Tìm phần thực và phần ảo của số phức  $w = 2z + \bar{z}$ .
2. Cho  $\log_2 x = \sqrt{2}$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x$ .

**Câu II (1,0 điểm).** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số  $y = -x^4 + 2x^2$ .

**Câu III (1,0 điểm).** Tìm  $m$  để hàm số  $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$  có hai điểm cực trị. Gọi  $x_1, x_2$  là hai điểm cực trị đó, tìm  $m$  để  $x_1^2 + x_2^2 = 3$ .

<http://dethithu.net>

**Câu IV (1,0 điểm).** Tính tích phân  $I = \int_0^3 3x(x + \sqrt{x^2 + 16}) dx$ .

**Câu V (1,0 điểm).** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3; 2; -2)$ ,  $B(1; 0; 1)$  và  $C(2; -1; 3)$ . Viết phương trình mặt phẳng đi qua  $A$  và vuông góc với đường thẳng  $BC$ . Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của  $A$  trên đường thẳng  $BC$ .

**Câu VI (1,0 điểm)**

1. Giải phương trình  $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0$ .
2. Học sinh A thiết kế bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng học của lớp mình. Bảng gồm 10 nút, mỗi nút được ghi một số từ 0 đến 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa cần nhấn liên tiếp 3 nút khác nhau sao cho 3 số trên 3 nút đó theo thứ tự đã nhấn tạo thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Học sinh B không biết quy tắc mở cửa trên, đã nhấn ngẫu nhiên liên tiếp 3 nút khác nhau trên bảng điều khiển. Tính xác suất để B mở được cửa phòng học đó.

**Câu VII (1,0 điểm).** Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$ ,  $AC = 2a$ . Hình chiếu vuông góc của  $A'$  trên mặt phẳng  $(ABC)$  là trung điểm của cạnh  $AC$ , đường thẳng  $A'B$  tạo với mặt phẳng  $(ABC)$  một góc  $45^\circ$ . Tính theo  $a$  thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  và chứng minh  $A'B$  vuông góc với  $B'C$ .

**Câu VIII (1,0 điểm).** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn đường kính  $BD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên các đường thẳng  $BC, BD$  và  $P$  là giao điểm của hai đường thẳng  $MN, AC$ . Biết đường thẳng  $AC$  có phương trình  $x - y - 1 = 0$ ,  $M(0; 4)$ ,  $N(2; 2)$  và hoành độ điểm  $A$  nhỏ hơn 2. Tìm tọa độ các điểm  $P, A$  và  $B$ .

**Câu IX (1,0 điểm).** Giải phương trình

$$3\log_3^2(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) + 2\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) \cdot \log_3(9x^2) + \left(1 - \log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 = 0.$$

**Câu X (1,0 điểm).** Xét các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$  (\*).

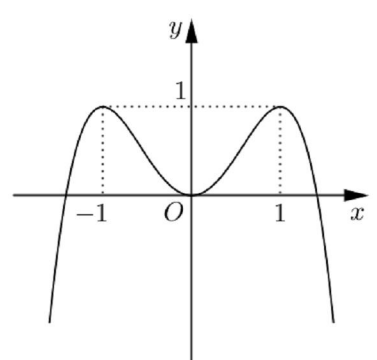
1. Tìm giá trị lớn nhất của  $x + y$ .
2. Tìm  $m$  để  $3^{x+y-4} + (x + y + 1)2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2) \leq m$  đúng với mọi  $x, y$  thỏa mãn (\*).

-----Hết-----

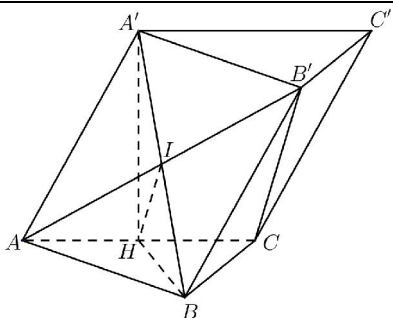
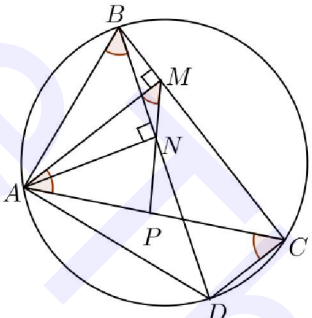
**Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.**

Họ và tên thí sinh: .....; Số báo danh: .....

Chữ ký của cán bộ coi thi 1: .....; Chữ ký của cán bộ coi thi 2: .....

Câu	Đáp án	Điểm																	
<b>I</b> <b>(1,0 điểm)</b>	<b>1. (0,5 điểm)</b>																		
	Ta có $w = 2(1 + 2i) + 1 - 2i$ $= 3 + 2i$ .	0,25																	
	Vậy phần thực của $w$ là 3 và phần ảo của $w$ là 2.	0,25																	
	<b>2. (0,5 điểm)</b>																		
	Ta có $A = 2\log_2 x - 3\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x$	0,25																	
	$= -\frac{1}{2}\log_2 x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .	0,25																	
<b>II</b> <b>(1,0 điểm)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Tập xác định: <math>D = \mathbb{R}</math>.</li> <li>Sự biến thiên: <a href="http://dethithu.net">http://dethithu.net</a></li> <li>Chiều biến thiên: <math>y' = -4x^3 + 4x</math>;</li> </ul>	0,25																	
	$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}; y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 0 < x < 1 \end{cases}; y' < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x > 1 \end{cases}$ <p>Hàm số đồng biến trên các khoảng <math>(-\infty; -1)</math> và <math>(0; 1)</math>.</p> <p>Hàm số nghịch biến trên các khoảng <math>(-1; 0)</math> và <math>(1; +\infty)</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Cực trị: hàm số đạt cực đại tại <math>x = \pm 1, y_{\text{CD}} = 1</math>; đạt cực tiểu tại <math>x = 0, y_{\text{CT}} = 0</math>.</li> <li>Giới hạn: <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty</math>.</li> </ul>	0,25																	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Bảng biến thiên:</li> </ul> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-1</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>0</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>1</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>y'</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>0</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>0</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>y</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\nearrow 1</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\searrow 0</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\nearrow 1</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\searrow -\infty</math></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$	$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$-$	$y$	$-\infty$	$\nearrow 1$	$\searrow 0$	$\nearrow 1$	$\searrow -\infty$
$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$														
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$-$														
$y$	$-\infty$	$\nearrow 1$	$\searrow 0$	$\nearrow 1$	$\searrow -\infty$														
<ul style="list-style-type: none"> <li>Đồ thị:</li> </ul> <div style="text-align: center;">  <p><a href="http://dethithu.net">http://dethithu.net</a></p> </div>	0,25																		
<b>III</b> <b>(1,0 điểm)</b>	Hàm số đã cho xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ .	0,25																	
	Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + m$ .																		
	Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $3x^2 - 6x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 3$ .	0,25																	

	Ta có $x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3 \Leftrightarrow 4 - 2 \cdot \frac{m}{3} = 3$	0,25
	$\Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn). Vậy $m = \frac{3}{2}$ .	0,25
<b>IV</b> (1,0 điểm)	Ta có $I = \int_0^3 3x^2 dx + \int_0^3 3x\sqrt{x^2 + 16} dx$ .	0,25
	• $I_1 = \int_0^3 3x^2 dx = x^3 \Big _0^3 = 27$ .	0,25
	• $I_2 = \int_0^3 3x\sqrt{x^2 + 16} dx$ .	
	Đặt $t = x^2 + 16$ , ta có $t' = 2x$ ; $t(0) = 16$ , $t(3) = 25$ . <a href="http://dethithu.net">http://dethithu.net</a>	0,25
	Do đó $I_2 = \int_{16}^{25} \frac{3}{2} \sqrt{t} dt$	
	$= t\sqrt{t} \Big _{16}^{25} = 61$ . <a href="http://dethithu.net">http://dethithu.net</a>	0,25
	Vậy $I = I_1 + I_2 = 88$ .	
<b>V</b> (1,0 điểm)	Ta có $\overrightarrow{BC} = (1; -1; 2)$ .	0,25
	Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với BC có phương trình là $x - y + 2z + 3 = 0$ .	0,25
	Đường thẳng BC có phương trình là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$ <a href="http://dethithu.net">http://dethithu.net</a>	0,25
	Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Ta có $H = (P) \cap BC$ .	
	- Vì $H \in BC$ nên $H(1 + t; -t; 1 + 2t)$ .	
	- Vì $H \in (P)$ nên $(1 + t) - (-t) + 2(1 + 2t) + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ .	0,25
	Vậy $H(0; 1; -1)$ .	
<b>VI</b> (1,0 điểm)	<b>1. (0,5 điểm)</b>	
	Ta có $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -4 \\ \sin x = \frac{1}{2}. \end{cases}$	0,25
	• $\sin x = -4$ : vô nghiệm.	
	• $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ . <a href="http://dethithu.net">http://dethithu.net</a>	0,25
	<b>2. (0,5 điểm)</b>	
	Không gian mẫu $\Omega$ có số phần tử là $n(\Omega) = A_{10}^3 = 720$ .	0,25
	Gọi E là biến cố: “B mở được cửa phòng học”. Ta có $E = \{(0; 1; 9), (0; 2; 8), (0; 3; 7), (0; 4; 6), (1; 2; 7), (1; 3; 6), (1; 4; 5), (2; 3; 5)\}$ . Do đó $n(E) = 8$ .	
	Vậy $P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{1}{90}$ .	0,25

<p><b>VII</b> (1,0 điểm)</p>		<p>Gọi <math>H</math> là trung điểm của <math>AC</math>, ta có <math>A'H \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{A'BH} = 45^\circ</math>.</p> <p>Ta có <math>BH = \frac{1}{2}AC = a</math> và <math>S_{\Delta ABC} = a^2</math>.</p> <p>Tam giác <math>A'HB</math> vuông cân tại <math>H</math>, suy ra <math>A'H = BH = a</math>.</p> <p>Do đó <math>V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC} = a^3</math>.</p> <p>Gọi <math>I</math> là giao điểm của <math>A'B</math> và <math>AB'</math>, ta có <math>I</math> là trung điểm của <math>A'B</math> và <math>AB'</math>. Suy ra <math>HI \perp A'B</math>.</p> <p>Mặt khác <math>HI</math> là đường trung bình của <math>\Delta AB'C</math> nên <math>HI \parallel B'C</math>. Do đó <math>A'B \perp B'C</math>.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
<p><b>VIII</b> (1,0 điểm)</p>		<p>Phương trình <math>MN</math>: <math>x + y - 4 = 0</math>.</p> <p>Tọa độ <math>P</math> là nghiệm của hệ</p> $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right).$ <p>Vì <math>AM</math> song song với <math>DC</math> và các điểm <math>A, B, M, N</math> cùng thuộc một đường tròn nên ta có</p> $\widehat{PAM} = \widehat{PCD} = \widehat{ABD} = \widehat{AMP}.$ <p>Suy ra <math>PA = PM</math>.</p> <p>Vì <math>A \in AC : x - y - 1 = 0</math> nên <math>A(a; a - 1), a &lt; 2</math>.</p> <p>Ta có <math>\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 5 \end{cases} \Rightarrow A(0; -1)</math>.</p> <p>Đường thẳng <math>BD</math> đi qua <math>N</math> và vuông góc với <math>AN</math> nên có phương trình là <math>2x + 3y - 10 = 0</math>.</p> <p>Đường thẳng <math>BC</math> đi qua <math>M</math> và vuông góc với <math>AM</math> nên có phương trình là <math>y - 4 = 0</math>.</p> <p>Tọa độ <math>B</math> là nghiệm của hệ <math>\begin{cases} 2x + 3y - 10 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 4)</math>.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
<p><b>IX</b> (1,0 điểm)</p>	<p>Điều kiện: <math>0 &lt; x \leq 2</math>.</p> <p>Khi đó phương trình đã cho tương đương với</p> $3 \log_3^2(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) - 4 \log_3(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) \cdot \log_3(3x) + \log_3^2(3x) = 0$ $\Leftrightarrow [\log_3(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) - \log_3(3x)] [3 \log_3(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) - \log_3(3x)] = 0.$ <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\log_3(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) - \log_3(3x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} = 3x</math></li> </ul> $\Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{4-x^2} = 9x^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x^2} = 9x^2 - 4$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq \frac{4}{9} \\ 81x^4 - 68x^2 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x^2 = \frac{68}{81}.$ <p>Kết hợp với điều kiện <math>0 &lt; x \leq 2</math>, ta có nghiệm <math>x = \frac{2\sqrt{17}}{9}</math>.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>3 \log_3(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) - \log_3(3x) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})^3 = 3x</math> (1).</li> </ul> <p>Vì <math>0 &lt; x \leq 2</math> nên <math>3x \leq 6</math>.</p>	<p>0,25</p>	

	<p>Mặt khác <math>(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})^2 = 4 + 2\sqrt{4-x^2} \geq 4 \Rightarrow (\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})^3 \geq 8</math>. Do đó phương trình (1) vô nghiệm.</p> <p>Vậy phương trình đã cho có nghiệm <math>x = \frac{2\sqrt{17}}{9}</math>.</p>	0,25												
<b>X</b> <b>(1,0 điểm)</b>	<b>1. (0,25 điểm)</b>													
	Điều kiện: $x \geq 2, y \geq -3$ .													
	Ta có (*) $\Leftrightarrow (x+y+1)^2 = 4(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3})$ (**).													
	Vì $2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \leq x+y+1$ nên từ (**) suy ra $(x+y+1)^2 \leq 8(x+y+1)$ $\Rightarrow x+y+1 \leq 8 \Rightarrow x+y \leq 7$ .	0,25												
	Ta có $x=6, y=1$ thỏa mãn (*) và $x+y=7$ . Do đó giá trị lớn nhất của biểu thức $x+y$ bằng 7.													
	<b>2. (0,75 điểm)</b>													
	Vì $2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \geq 0$ nên từ (**) suy ra $(x+y+1)^2 \geq 4(x+y+1)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 \leq 0 \\ x+y+1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \text{ (vì } x+y+1 \geq 0) \\ x+y+1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x+y \geq 3 \end{cases}$	0,25												
	Vì $x^2 \geq 2x$ (do $x \geq 2$ ), $y^2 + 1 \geq 2y$ nên $x^2 + y^2 + 1 \geq 2(x+y)$ . Do đó $3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2) \leq 3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 6(x+y) + 3$ .	0,25												
	Đặt $t = x+y$ , ta có $t = -1$ hoặc $3 \leq t \leq 7$ .													
	Xét hàm số $f(t) = 3^{t-4} + (t+1)2^{7-t} - 6t + 3$ . Ta có $f(-1) = \frac{2188}{243}$ ; $f'(t) = 3^{t-4} \ln 3 + 2^{7-t} - (t+1)2^{7-t} \ln 2 - 6$ ; $f''(t) = 3^{t-4} \ln^2 3 + [(t+1) \ln 2 - 2]2^{7-t} \ln 2 > 0, \forall t \in [3;7]$ . Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(3;7)$ . Mà $f'(t)$ liên tục trên $[3;7]$ và $f'(3)f'(7) < 0$ , do đó $f'(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t_0 \in (3;7)$ .													
	Bảng biến thiên													
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;"><math>t</math></td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;"><math>t_0</math></td> <td style="text-align: center;">7</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>f'(t)</math></td> <td style="text-align: center;">-</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">+</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>f(t)</math></td> <td style="text-align: center;"><math>\frac{148}{3}</math></td> <td style="text-align: center;"><math>f(t_0)</math></td> <td style="text-align: center;">-4</td> </tr> </tbody> </table>	$t$	3	$t_0$	7	$f'(t)$	-	0	+	$f(t)$	$\frac{148}{3}$	$f(t_0)$	-4	0,25
$t$	3	$t_0$	7											
$f'(t)$	-	0	+											
$f(t)$	$\frac{148}{3}$	$f(t_0)$	-4											
	Suy ra $3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2) \leq \frac{148}{3}$ với mọi $x, y$ thỏa mãn (*).													
	Đẳng thức xảy ra khi $x=2, y=1$ .													
	Vậy $m \geq \frac{148}{3}$ .													

----- Hết -----

Facebook Admin DeThiThu.Net ( Hữu Hùng Hiền Hòa): <http://facebook.com/huuhunghienhoa>