Probabilités première année

Enoncés des exercices

Version du 26 avril 2017

Université Paul Sabatier - Toulouse 3
IUT de Toulouse 3 A
Département GEA Rangueil

Nicolas SAVY
nicolas.savy@iut-tlse3.fr
Bureau 107

1 Dénombrements

Exercice 1 Une urne contient dix boules sur lesquelles ont été marquées les dix lettres de l'alphabet de A à J. On tire successivement quatre boules sans remise et l'on inscrit dans l'ordre les lettres portées par les boules tirées.

Combien de mots de quatre lettres (ayant un sens ou non) peut-on former ?

Exercice 2 Combien de mots de trois lettres peut-on former en utilisant les lettres du mot PARIS et uniquement celles-là ?

Exercice 3 Lors d'une course de chevaux, il y a 8 partants.

Combien de possibilités y-a-t-il pour le tiercé final ? Pour le quarté ?

Exercice 4 Combien de nombres de 4 chiffres puis-je écrire en utilisant uniquement les chiffres 3,6,7 ?

Exercice 5 Considérons un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains de cinq cartes ?
2. Combien y a-t-il de mains de cinq cartes contenant exactement 2 coeurs ?
3. Combien y a-t-il de mains de cinq cartes contenant au moins un roi ?

Exercice 6 Lors d'un tirage du loto de 4 numéros avec 10 boules, combien y-a-t-il de grilles possibles ?

Lors d'un tirage du loto de 6 numéros avec 49 boules, combien y-a-t-il de grilles possibles ?

1.1 Réponses

Réponses 1 Sans répétition, avec ordre : $A_{10}^{4} = 5040$

Réponses 2 Avec répétition, avec ordre : $5^3 = 125$

Réponses 3 Sans répétition, avec ordre : $A_8^3 = 336$, $A_8^4 = 1680$

Réponses 4 Avec répétition, avec ordre : $3^4 = 81$

Réponses 5

1. Sans répétition, sans ordre : $C_{32}^5 = 201\,376$
2. Sans répétition, sans ordre : $C_8^2 \cdot C_{24}^3 = 56\,672$
3. $C_{32}^5 - C_{28}^5 = C_4^1 \cdot C_{28}^4 + C_4^2 \cdot C_{28}^3 + C_4^3 \cdot C_{28}^2 + C_4^4 \cdot C_{28}^1 = 103\,096$

Réponses 6 $C_{10}^4 = 210, A_{49}^6 = 13\,983\,816$

2 Probabilités

Exercice 1 On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 carte et on suppose que tous les tirages sont équiprobables. On considère les événements suivants :

A. "La carte tirée est un roi",

B. "La carte tirée est un trèfle"

C. "La carte tirée est une carte noire"

1. Définir par une phrase les événements $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B$, $B \cup C$ et $A \cup B \cup C$.
2. Calculer les probabilités de A, B, C et des événements ci-dessus.

Exercice 2 On considère les élèves d'une classe. Trois langues leur sont proposées comme option, le russe, l'italien et l'espagnol. Les élèves peuvent n'en choisir aucune, en choisir une, deux ou les trois. On note C l'ensemble des élèves composant cette classe, R l'ensemble des élèves choisissant le Russe, I l'ensemble des élèves choisissant l'italien et E ceux pratiquant l'espagnol.

1. Traduire en français les ensembles suivants $R \cap E$, $R \cup I$, $\overline{I}$, $\overline{I \cap E}$.
2. Traduire en utilisant le formalisme ensembliste
   - Les élèves qui font russe et espagnol
   - Les élèves qui ne parlent aucune des trois langues
   - Les élèves qui parlent au moins une des trois langues

Exercice 3 On lance un dé à six faces équilibré. Calculer les probabilités d'obtenir un nombre pair, un multiple de 3, un nombre strictement supérieur à 3 puis celle d'obtenir un nombre à la fois pair et supérieur à 3.

Exercice 4 On considère les événements aléatoires suivants :

A. "Ce jeudi, il y aura du vent"

B. "Ce jeudi, il y aura de la pluie"

Météo-France a annoncé les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}[A] = \frac{3}{4}, \mathbb{P}[B] = \frac{1}{2}, \mathbb{P}[A \cap B] = \frac{2}{5}, \mathbb{P}[A \cup \overline{B}] = \frac{9}{10}.$$

1. A et B sont-ils indépendants ? Sont-ils incompatibles ?

2. Expliciter les événements suivants à l'aide des opérations ensemblistes :
   C) "Ce jeudi, il y aura de la pluie ou du vent"
   D) "Ce jeudi, il y aura de la pluie et du vent"
   E) "Ce jeudi, il n'y aura ni pluie, ni vent"
   F) "Ce jeudi, il y aura de la pluie mais pas de vent"
3. Calculer les probabilités des événements précédents en menant vos calculs sous forme fractionnelle.

Exercice 5 Une urne contient quatre boules numérotées 10, 20, 30 et 40. On effectue trois tirages successifs avec remise, c'est-é-dire qu'après chaque tirage on replace la boule tirée dans l'urne. Le résultat d'une expérience peut alors être représenté par un triplet, une liste ordonnée de trois éléments de l'ensemble $E = \{10, 20, 30, 40\}$.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir les cas suivants :
   a) La première boule tirée porte le numéro 10, la deuxième le numéro 40, la troisième le numéro 20 ?
   b) La première boule tirée porte le numéro 30 et la deuxième le numéro 20 ?
   c) La deuxième boule porte le numéro 20 ?

Exercice 6 Soit un stock de 10 pièces mécaniques d'aspect identique parmi lesquelles 3 sont défectueuses.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuses ?
2. On prend successivement 3 pièces au hasard, avec remise après chaque prélèvement.
   Quelle est la probabilité pour que les 3 pièces soient défectueuses ?
3. On prend successivement 3 pièces au hasard, sans remise.
   Quelle est la probabilité pour que les 3 pièces soient défectueuses ?

2.1 Réponses

Réponses 1

— $\mathbb{P}[A] = \frac{1}{8}$: c'est un roi.
— $\mathbb{P}[B] = \frac{1}{4}$: c'est un trèfle.
— $\mathbb{P}[C] = \frac{1}{2}$: c'est une carte noire.
— $\mathbb{P}[\overline{A}] = \frac{7}{8}$: ce n'est pas un roi.
— $\mathbb{P}[\overline{B}] = \frac{3}{4}$: ce n'est pas un trèfle.
— $\mathbb{P}[\overline{C}] = \frac{1}{2}$: c'est une carte rouge.
— $\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{1}{32}$: c'est le roi de trèfle.
— $\mathbb{P}[B \cap C] = \frac{1}{4}$: ce sont les trèfles (ils sont noirs).
— $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \frac{1}{32}$: c'est le roi de trèfle.
— $\mathbb{P}[A \cup B] = \frac{11}{32}$: c'est un trèfle ou un des trois autres rois (11 possibilités).
— $\mathbb{P}[B \cup C] = \frac{1}{2}$: c'est une carte noire.
— $\mathbb{P}[A \cup B \cup C] = \frac{18}{32}$: c'est une carte noire ou un des deux rois rouges (18 possibilités).

Réponses 2

1. — Les élèves ayant choisi Russe et espagnol en même temps
   — Les élèves ayant choisi Russe ou Italien (ou les deux)
   — Les élèves n'ayant pas choisi Italien
   — Les élèves n'ayant pas choisi Italien et espagnol en même temps (ils peuvent avoir choisi l'un ou l'autre, ou aucun)
2. — $R \cap E$
   — $\overline{R} \cap \overline{E} \cap \overline{I}$
   — $R \cup E \cup I$

Réponses 3

— $\mathbb{P}[\text{"nombre pair"}] = \frac{1}{2}$
— $\mathbb{P}[\text{"nombre multiple de 3"}] = \frac{1}{3}$
— $\mathbb{P}[\text{"nombre} > 3\text{"}] = \frac{1}{2}$
— $\mathbb{P}[\text{"nombre pair} > 3\text{"}] = \frac{1}{3}$

Réponses 4 A et B ne sont ni indépendants, ni incompatibles.

— $\mathbb{P}[A \cup B] = \frac{17}{20}$
— $\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{2}{5}$
— $\mathbb{P}[\overline{A} \cap \overline{B}] = \frac{3}{20}$
— $\mathbb{P}[\overline{A} \cap B] = \frac{1}{10}$

Réponses 5

1. $4^3 = 64$
2. a) $\frac{1}{64}$
   b) $\frac{4}{64}$
   c) $\frac{16}{64}$

Réponses 6

1. $\frac{3}{10}$
2. $\frac{27}{1000}$
3. $\frac{1}{120}$

3 Probabilités conditionnelles

Exercice 1 Une franchise de mode possède trois magasins A, B, C qui reçoivent respectivement 20, 30 et 50 % de la production. La probabilité qu'un produit invendu (événement I) ait été retourné par A, B ou C est :

$$\mathbb{P}[I|A] = 0,05,\ \mathbb{P}[I|B] = 0,04,\ \mathbb{P}[I|C] = 0,01$$

1. Déduire de l'énoncé les probabilités $\mathbb{P}[A]$, $\mathbb{P}[B]$, $\mathbb{P}[C]$ qu'un article soit respectivement distribué par A,B ou C.

2. Rappeler les deux expressions de la formule des probabilités totales pour la partition $\{A, B, C\}$.
3. En déduire la probabilité qu'un produit soit invendu.
4. Rappeller la formule de Bayes pour les événements A et I, puis $\overline{I}$ et C.
5. En déduire la probabilité pour qu'un produit invendu provienne de A.
6. Donner la probabilité pour qu'un produit ait été vendu par C.

Exercice 2 Trois ouvriers produisent la même pièce en même temps. Paul fabrique 2000 pièces dont 40 défectueuses, Vincent 1800 pièces dont 90 défectueuses et Pierre 2200 pièces dont 88 défectueuses. On choisit une pièce au hasard dans la production totale. Si elle est bonne, quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par Vincent ?

Exercice 3 On mélange des graines de deux provenances différentes A et B de sorte qu'un tiers des graines proviennent de A et deux tiers de B. La moitié des graines de A et les trois quarts des graines de B sont noires. On choisit une graine au hasard : elle est noire. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de A ?

Exercice 4 Un test est utilisé pour dépister une maladie. Si le patient est effectivement atteint, le test donne un résultat positif dans 99 % des cas. Cependant, il se peut que le résultat du test soit positif alors que le patient est en bonne santé, et ceci se produit dans 2 % des cas. Sachant qu'en moyenne un patient sur 1000 est atteint de la maladie à dépister, calculer la probabilité qu'un patient soit atteint sachant que le test a été positif ?

Exercice 5 A la fin de leur montage, on soumet des ampoules électriques à des tests de conformité qui ne sont pas fiables à 100%. Si une ampoule est conforme, le test indique "positif" dans 96 % des cas (et donc dans 4 % des cas, une ampoule conforme est jetée). Si une ampoule est défectueuse (non conforme), le test le détecte (résultat "négatif") dans 94% des cas (et donc dans 6% des cas, on garde l'ampoule). On remarque que en moyenne 8% des ampoules sont défectueuses (non-conformes).

Estimer la fiabilité du test :

1. Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que l'ampoule soit effectivement conforme ?
2. Sachant que le test est négatif, quelle est la probabilité que l'ampoule soit effectivement défectueuse ?

Exercice 6 Deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. La cadence du premier atelier est le double de celle du deuxième. Il y a 3% de pièces défectueuses dans l'atelier 1 et 4% dans l'atelier 2. On prélève une pièce au hasard. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. La pièce provient de l'atelier 1,
2. La pièce est défectueuse,
3. La pièce provient de l'atelier 1, sachant qu'elle est défectueuse.

Exercice 7 On dispose de 4 jetons : A,B,C et D tels que A et B ont 2 faces blanches, C a une face noire et un face blanche et D a deux faces noires. On tire un jeton au hasard et on ne voit qu'une de ses faces : elle est blanche. Calculer la probabilité pour que l'autre face soit blanche.

Exercice 8 Dans une population donnée, 15 % des individus ont la Maladie M_a. Parmi eux, 20% ont une Maladie M_b. Parmi les personnes non atteintes par M_a, 4% ont la maladie M_b. On considère un individu. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Il a la maladie M_a
2. Il a la maladie M_b sachant qu'il a M_a
3. Il a la maladie M_b sachant qu'il n'a pas M_a
4. Il a la maladie M_a et la maladie M_b
5. Il n'a pas la maladie M_a mais il a la maladie M_b
6. Il a la maladie M_b
7. Il a la maladie M_a sachant qu'il a M_b.

Exercice 9 Trois étudiants A, B et C passent un examen le même jour. Les trois examens sont différents et se passe dans des lieux différents. Les probabilités de succès sont estimées à 0,7 pour A, 0,4 pour B et 0,6 pour C.

Calculer la probabilité

1. que les 3 soient reçus
2. que les trois échouent
3. que A seulement soit reçus
4. qu'un seul réussisse
5. que B soit le seul à échouer
6. qu'exactement deux soient reçus
7. qu'au moins un soit reçus

3.1 Pour s'entraîner

Exercice 10 Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds. On choisit un individu au hasard. Calculez :

1. Définir correctement les événements énoncés ci-dessus.
2. La probabilité, pour un individu ayant les yeux bruns, d'avoir les cheveux blonds.
3. La probabilité, pour un individu qui a les cheveux blonds, d'avoir les yeux bruns.
4. La probabilité de ne pas avoir les yeux bruns pour un individu qui a les cheveux blonds.

Exercice 11 Un meuble de rangement comporte trois tiroirs. On cherche un vêtement dedans. Pour chacun des trois tiroirs, la probabilité que ce vêtement s'y trouve est de 31%.

1. Définir les événements ci-dessus, ainsi que leur probabilité respective.
2. Quelle est la probabilité que le vêtement ne se trouve pas dans le meuble ?
3. En déduire / établir qu'on a bien une partition de l'univers des possibles.
4. On a fouillé en vain les deux premiers tiroirs. Quelle est la probabilité que le vêtement se trouve dans le troisième tiroir ?

Exercice 12 Dans un lycée, 20% de garçons et 12% de filles étudient la biologie. Il y a dans ce lycée autant de filles que de garçons.

1. On choisit un élève au hasard et on constate qu'il étudie la biologie. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?
2. Même question lorsque, choisissant un élève au hasard, on constate qu'il n'étudie pas la biologie ?

3.2 Réponses

Réponses 1 "A" : le produit était dans le magasin A, "B" : le produit était dans le magasin B, "C" : le produit était dans le magasin C, "I" : le produit n'a pas été vendu

1. $\mathbb{P}[A] = 0.2,\ \mathbb{P}[B] = 0.3,\ \mathbb{P}[C] = 0.5$
2. — $\mathbb{P}[I] = \mathbb{P}[A \cap I] + \mathbb{P}[B \cap I] + \mathbb{P}[C \cap I]$
   — $\mathbb{P}[I] = \mathbb{P}[I|A]\,\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[I|B]\,\mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[I|C]\,\mathbb{P}[C]$
3. $\mathbb{P}[I] = 0.027$
4. — $\mathbb{P}[A|I] = \frac{\mathbb{P}[I|A]\cdot\mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[I]}$
   — $\mathbb{P}[C|\overline{I}] = \frac{\mathbb{P}[\overline{I}|C]\cdot\mathbb{P}[C]}{\mathbb{P}[\overline{I}]}$
5. $\mathbb{P}[A|I] = 0.37$
6. $\mathbb{P}[C|\overline{I}] = 0.51$

Réponses 2 "V" : la pièce a été produite par Vincent, "D" : la pièce est défectueuse

$\mathbb{P}[V|\overline{D}] = 0.296$ ($\mathbb{P}[V] = \frac{18}{60}, \mathbb{P}[D] = \frac{218}{6000}, \mathbb{P}[D|V] = \frac{90}{1800}$)

Réponses 3 "N" la graine est noire, "A" : la graine provient de A, "B" : la graine provient de B

$\mathbb{P}[A|N] = 0.25$ ($\mathbb{P}[A] = \frac{1}{3}, \mathbb{P}[B] = \frac{2}{3}, \mathbb{P}[N|A] = \frac{1}{2}, \mathbb{P}[N|B] = \frac{3}{4}, \mathbb{P}[N] = \frac{2}{3}$)

Réponses 4 "M" : le patient est malade, "P" : le test est positif

$\mathbb{P}[M|P] = 0.047$ ($\mathbb{P}[P|M] = 0.99, \mathbb{P}[P|\overline{M}] = 0.02, \mathbb{P}[M] = 0.001, \mathbb{P}[P] = 0.02097$)

Réponses 5 "C" : l'ampoule est conforme, "P" : les test est positif

1. $\mathbb{P}[C|P] = 0.99$ ($\mathbb{P}[C] = 0.92, \mathbb{P}[P] = 0.888, \mathbb{P}[P|C] = 0.96$)
2. $\mathbb{P}[\overline{C}|\overline{P}] = 0.67$ ($\mathbb{P}[\overline{P}|\overline{C}] = 0.94$)

Réponses 6 "A_i" : la pièce provient de l'atelier i, "D" : la pièce est défectueuse

1. $\mathbb{P}[A_1] = \frac{2}{3}$
2. $\mathbb{P}[D] = 0.033$ ($\mathbb{P}[D|A_1] = 0.03, \mathbb{P}[D|A_2] = 0.04$)
3. $\mathbb{P}[A_1|D] = 0.6$

Réponses 7 "1_B" : la première face est blanche, "2_B" : la seconde face est blanche

$\mathbb{P}[2_B|1_B] = \frac{4}{5}$ ($\mathbb{P}[1_B \cap 2_B] = \frac{1}{2}, \mathbb{P}[1_B] = \frac{5}{8}$)

Réponses 8 "A" : l'individu est atteint de la maladie M_a, "B" : l'individu est atteint de la maladie M_b

1. $\mathbb{P}[A] = 0.15$
2. $\mathbb{P}[B|A] = 0.2$
3. $\mathbb{P}[B|\overline{A}] = 0.04$
4. $\mathbb{P}[B \cap A] = 0.03$
5. $\mathbb{P}[B \cap \overline{A}] = 0.034$
6. $\mathbb{P}[B] = 0.064$
7. $\mathbb{P}[A|B] = 0.4688$

Réponses 9 "A" : l'étudiant A réussit l'examen, "B" : l'étudiant B réussit l'examen, "C" : l'étudiant C réussit l'examen.

1. $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = 0.168$
2. $\mathbb{P}[\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}] = 0.072$
3. $\mathbb{P}[A \cap \overline{B} \cap \overline{C}] = 0.168$
4. $\mathbb{P}[\{A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\} \cup \{\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\} \cup \{\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\}] = 0.324$
5. $\mathbb{P}[A \cap \overline{B} \cap C] = 0.252$
6. $\mathbb{P}[\{\overline{A} \cap B \cap C\} \cup \{A \cap \overline{B} \cap C\} \cup \{A \cap B \cap \overline{C}\}] = 0.426$
7. $\mathbb{P}[\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}}] = 0.928$

Réponses 10

1. Avoir les yeux bruns : YB ; Avoir les cheveux blonds : CB
2. $\mathbb{P}[CB|YB] = \frac{\mathbb{P}[YB \cap CB]}{\mathbb{P}[YB]} = \frac{15}{40} = 37.5\%$
3. $\mathbb{P}[YB|CB] = \frac{\mathbb{P}[YB \cap CB]}{\mathbb{P}[CB]} = \frac{15}{25} = 60\%$
4. $\mathbb{P}\left[\overline{B}|CB\right] = 1 - \mathbb{P}[YB|CB] = 40\%$

Réponses 11

1. T_i : "Le vêtement est dans le tiroir i", $\mathbb{P}[T_i] = 31\%$ (3 événements)
2. $\emptyset$: "Le vêtement n'est dans aucun tiroir" et
$$\mathbb{P}[\emptyset] = \mathbb{P}\left[\overline{T_1 \cup T_2 \cup T_2}\right] = 1 - 3 \cdot 0.31 = 7\%$$
par-ce que les événements T_i sont clairement incompatibles.
3. On voit qu'on obtient ainsi quatre événements incompatibles dont la somme des probas vaut 100% : c'est une famille complète d'événements.
4. Avec cette famille complète, on voit enfin que
$$\mathbb{P}(T_3|[\overline{T_1} \cap \overline{T_2}]) = \frac{\mathbb{P}(T_3 \cap \overline{T_1} \cap \overline{T_2})}{\mathbb{P}(\overline{T_1} \cap \overline{T_2})} = \frac{\mathbb{P}(T_3)}{\mathbb{P}(T_3) + \mathbb{P}(\emptyset)} = \frac{31}{38} = 0.815.$$
Ceci montre au passage que T_3 n'est pas indépendant de [T_1 ou T_2].

Réponses 12

1. $\mathbb{P}(G|B) = 0.625$
2. $\mathbb{P}(G|\overline{B}) \approx 0.476$

4 Variables aléatoires

Exercice 1 Le tableau de la loi de probabilité d'un dé truqué à six faces est :

i	1	2	3	4	5	6
p_i	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1

Soit les événements $A = \{i, i \leq 4\}$; $B = \{i, i \geq 4\}$; $C = \{i, i < 4\}$. Calculer

$$\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B], \mathbb{P}[C]; \mathbb{P}[A \cap B]; \mathbb{P}[A \cap C]; \mathbb{P}[B \cap C].$$

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par

x	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}_X(x)$	0.1	0.3	0.4	0.1	0.05	0.05

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Déterminer et représenter la fonction de répartition de X
3. Calculer les probabilités $\mathbb{P}[X < 4], \mathbb{P}[X > 2], \mathbb{P}[3 < X \leq 4.5], \mathbb{P}[2 \leq X < 4], \mathbb{P}[2 < X < 4]$.

Exercice 3 On joue avec deux dés à quatre faces. Sur le premier dé, les faces portent les numéros 1, 2, 3 et 3. Sur le deuxième dé, les faces portent les numéros 1, 2, 2 et 2. Deux règles du jeu sont possibles :

1. La partie coûte 1 euro. On lance les deux dés.
   a) Si la somme est 2, on gagne 6 euros,
   b) Si la somme est 3 ou 4, on gagne 2 euros,
   c) Si la somme est 5, on ne gagne rien.
2. La partie coûte 10 euros. On lance les deux dés.
   a) Si la somme est 2, on gagne 60 euros,
   b) Si la somme est 3 ou 4, on gagne 12 euros,
   c) Si la somme est 5, on ne gagne rien.

En étudiant l'espérance et l'écart-type de chacun de ces jeux, trouver lequel est le plus intéressant (commencer par écrire la loi, valeurs et probas associées, de la variable "somme des deux dés")

Exercice 4 Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 0, +1\}$. La loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

$X\backslash Y$	-1	0	1
-1	$1/5$	0	$1/5$
0	$1/15$	$1/15$	$1/15$
1	$1/5$	0	$1/5$

1. Donner les lois marginales de X et de Y.
2. Calculer la covariance du couple (X, Y).
3. X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 5 Trois urnes A_1, A_2, A_3 contiennent chacune 10 boules supposées indiscernables numérotées de 1 à 10. On tire une boule dans chacune des urnes et on suppose les tirages indépendants.

1. Quelle hypothèse peut-on faire sur les tirages grâce à l'indiscernabilité ? Donner alors la probabilité d'obtenir un 2 à chaque tirage.
2. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de 5 obtenus lors de cette épreuve de 3 tirages.
   a) Exprimer les événements élémentaires de X en fonction des événements A_i : "Le tirage dans l'urne A_i donne un 5" $(i = 1, 2, 3)$.
   b) Donner la loi de X et représenter son diagramme en bâtons.
   c) Calculer l'espérance et la variance de X (en présentant vos calculs sous forme fractionnelle).
   d) Donner la fonction de répartition de X et la courbe cumulative associée.
   e) Indiquez comment retrouver $\mathbb{P}[X \leq 2], \mathbb{P}[X = 2]$ puis $\mathbb{P}[1 < X \leq 2]$ à l'aide de la fonction de répartition.

Exercice 6 Dans un atelier textile, la température exprimée en Fahrenheit, ne s'écarte jamais de plus de 2 degrés de 62 degrés. Plus précisément, la température est une variable aléatoire F de distribution :

f	60	61	62	63	64
$\mathbb{P}(F = f)$	0.05	0.25	0.4	0.25	0.05

1. Calculer l'espérance et la variance de F.
2. On a décidé de lire la température sur l'échelle des degrés Celsius qui satisfait $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Quelle est l'espérance et la variance de la température exprimée en degrés Celsius ?

4.1 Réponses

Réponses 1

— $\mathbb{P}[A] = 0.8$
— $\mathbb{P}[B] = 0.4$
— $\mathbb{P}[A] = 0.6$
— $\mathbb{P}[A \cap B] = 0.2$
— $\mathbb{P}[A \cap C] = 0.6$
— $\mathbb{P}[B \cap C] = 0$

Réponses 2

1. $\mathbb{E}[X] = 1.85$, $\mathbb{V}[X] = 1.4275$
2. Voir Figure 1

x	0	1	2	3	4	5
$F_X(x)$	0.1	0.4	0.8	0.9	0.95	1

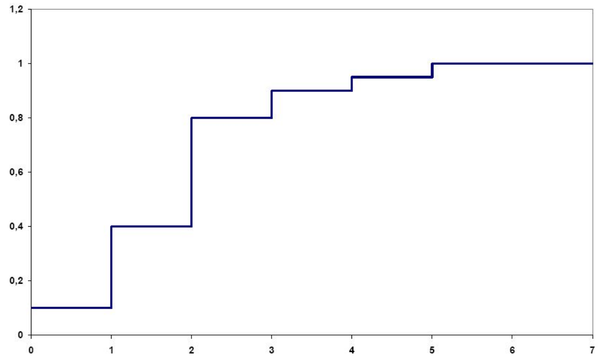


FIGURE 1 – Représentation graphique de F_X de l'exercice 2

3. — $\mathbb{P}[X < 4] = 0.9$
   — $\mathbb{P}[X > 2] = 0.2$
   — $\mathbb{P}[3 < X \leq 4.5] = 0.05$
   — $\mathbb{P}[2 \leq X < 4] = 0.5$
   — $\mathbb{P}[2 < X < 4] = 0.1$

Réponses 3 X : v.a. "Somme des deux dés", Y_1 : v.a. "Gain au jeu 1", Y_2 : v.a. "Gain au jeu 2"

Lois des v.a. :

x	2	3	4	5	y_1	5	1	-1	y_2	50	2	-10
$\mathbb{P}[X = x]$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\mathbb{P}[Y_1 = y_1]$	$\frac{1}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\mathbb{P}[Y_2 = y_2]$	$\frac{1}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$

Espérances : $\mathbb{E}[Y_1] = 0.5$, $\mathbb{E}[Y_2] = 0.5$

Variances : $\mathbb{V}[Y_1] = \frac{36}{16}$, $\mathbb{V}[Y_2] = \frac{3132}{16}$

Conclusion : gain moyen identique, mais nettement moins variable avec le jeu 1.

Réponses 4

1. Lois marginales :

x	-1	0	1	y	-1	0	1
$\mathbb{P}[X = x]$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\mathbb{P}[Y = y]$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$

2. $cov(X, Y) = 0$
3. Non. Par exemple $\mathbb{P}[\{X = -1\} \cap \{Y = -1\}] = \frac{1}{5} \neq \mathbb{P}[X = -1] \cdot \mathbb{P}[Y = -1] = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{15}$

Réponses 5

1. On peut admettre l'équiprobabilité. Couplée à l'indépendance des tirages, on obtient $\mathbb{P}[\text{"2 à chaque tirage"}] = 10^{-3}$
2. a) — $X = 0 \iff (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3})$
   — $X = 1 \iff (A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)$
   — $X = 2 \iff (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3})$
   — $X = 3 \iff (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

   b) Voir Figure 2.

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}[X = x]$	$\frac{729}{1000}$	$\frac{243}{1000}$	$\frac{27}{1000}$	$\frac{1}{1000}$

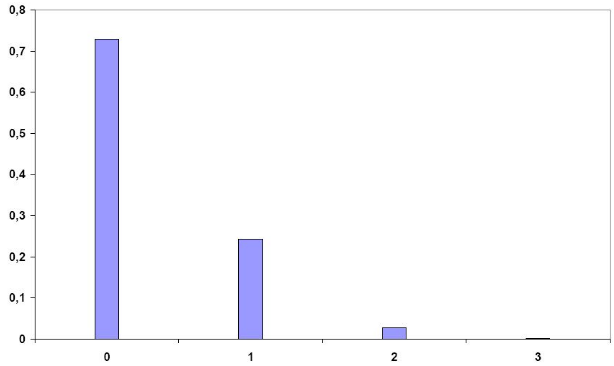


Figure 2 – Représentation graphique de la loi de X

   c) $\mathbb{E}[X] = \frac{3}{10}$, $\mathbb{V}[X] = \frac{27}{100}$

   d) Voir Figure 3

x	0	1	2	3
$F_X(x)$	$\frac{729}{1000}$	$\frac{972}{1000}$	$\frac{999}{1000}$	1

Figure 3 – Représentation graphique de la fonction de répartition de X

   e) — $\mathbb{P}[X \leq 2] = F_X(2) = \frac{972}{1000}$
   — $\mathbb{P}[X = 2] = \frac{27}{1000}$
   — $\mathbb{P}[1 < X \leq 2] = F_X(2) - F_X(1) = \frac{27}{1000}$

Réponses 6

1. $\mathbb{E}[F] = 62$, $\mathbb{V}[F] = 0.9$
2. $\mathbb{E}[C] = 16.667$, $\mathbb{V}[C] = 0.278$

5 Les lois de probabilités discrètes

Exercice 1 Un automobiliste rencontre sur son trajet 5 feux de circulation tricolores. Pour chacun de ces feux, le rouge dure 15 secondes, l'orange 5 secondes et le vert 40 secondes. Les 5 feux ne sont pas synchronisés et l'on suppose que les aléa de la circulation sont tels que l'état d'un feu devant lequel se présente l'automobile ne dépend pas de l'état des autres feux rencontrés.

1. L'automobile se présente devant un feux. Quelle est la probabilité que ce feu soit vert ?
2. Quelle est la probabilité que sur son trajet, l'automobile rencontre exactement 3 feux verts sur les 5 feux rencontrés ?
3. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés sur le trajet. Quelle est sa loi de probabilité et son espérance ?

Exercice 2 Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de blanches est p. Les tirages se font avec remise ainsi la proportion de boules blanches ne changent jamais. Soit X l'événement obtenir une boule blanche. Quelles sont l'espérance et la variance de cette variable ?

Exercice 3 On lance 10 fois un dé. Quelle est la probabilité d'avoir 4 fois le 1 ?

Exercice 4 Un joueur lance deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que les dés sont non-truqués et donc que pour chaque dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.

Le joueur suit les règles suivantes :
— Si les deux dés donnent le même numéro alors le joueur perd 10 points
— Si les deux dès donnent deux numéros de parités différentes (l'un est pair et l'autre impair) alors il perd 5 points.
— Dans les autres cas il gagne 15 points.

1. Le joueur joue une partie et on note X la variable aléatoire correspond au nombre de points qu'il obtient.
   a) Déterminez la loi de probabilité de X puis calculez l'espérance de X.
   b) Représentez graphiquement la fonction de répartition de X.
2. Le joueur effectue 10 parties de suites. Les résultats des parties sont indépendants les uns des autres. On appelle alors Y la variable aléatoire égale au nombre de fois où le joueur gagne 15 points.
   a) Expliquez pourquoi Y suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de Y?
   b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une fois 15 points ?
   c) Quelle est l'espérance de Y, sa variance. Combien de fois le joueur peut espérer gagner 15 points ?

Exercice 5 Dans un atelier, le nombre d'accidents au cours d'une année suit une loi de Poisson de paramètre 5. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Il n'y a pas d'accidents au cours d'une année
2. Il y a exactement 4 accidents au cours de l'année
3. Il a plus de 6 accidents au cours de l'année

Exercice 6 On joue à pile ou face. Si on obtient pile, on gagne 1 euro. Si on obtient face, on perd 1 euro. On considère une série de 10 lancers.

1. Si la pièce est non truquée (la probabilité d'avoir pile est et la probabilité d'avoir face est la même) :

a) Quelle est la probabilité de gagner 10 euros ?
b) Quelle est l'espérance de gain ?

2. Si la pièce est légèrement truquée et tombe sur face dans 60% des cas
   a) Quelle est la probabilité de gagner 10 euros ?
   b) Quelle est l'espérance de gain ?

Exercice 7 Une urne contient 100 boules dont une rouge.

1. On effectue n tirages indépendants avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois la boule rouge ?
2. Combien de tirages indépendants (n) doit-on effectuer pour que cette probabilité soit au moins 0.95 ?

Exercice 8 On suppose que sur l'ensemble des passagers d'un train quelconque, il y a en moyenne 1 médecin. On suppose que le nombre aléatoire de médecins dans un train suit une loi de Poisson (comptage d'événements rares). Quelle est la probabilité de ne trouver aucun médecin ? Un médecin ? Deux médecins ? Cinq médecins ?

5.1 Réponses

Réponses 1 ”V” : le feu est vert, ”X” : nombre de verts sur le trajet

1. $\mathbb{P}[V] = \frac{2}{3}$
2. $\mathbb{P}[X = 3] = 0.329$
3. $\mathbb{E}[X] = \frac{10}{3}$

x	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}[X = x]$	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$

Réponses 2 $\mathbb{E}[X] = p$, $\mathbb{V}[X] = p(1-p)$

Réponses 3 ”X” nombre de uns

$\mathbb{P}[X = 4] = 0.0542$

Réponses 4

1. $\mathbb{E}[X] = \frac{30}{36}$

x	-10	-5	15
$\mathbb{P}[X = x]$	$\frac{6}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{12}{36}$

2. a) Epreuve aléatoire à deux issues possibles ; Répétitions indépendantes ; Proba de succès d'une épreuve : $\frac{1}{3}$
   b) $\mathbb{P}[Y \geq 1] = 0.983$
   c) $\mathbb{E}[Y] = \frac{10}{3}$; $\mathbb{V}[Y] = \frac{20}{9}$; $\frac{10}{3}$ fois.

Réponses 5 $Y \sim \mathcal{P}(5)$

1. $\mathbb{P}[Y=0] = 0.0067$
2. $\mathbb{P}[Y=4] = 0.1755$
3. $\mathbb{P}[Y \geq 6] = 0.384$

Réponses 6 X : nombre de piles, G : gain total

1. a) $\mathbb{P}[G=10] = \mathbb{P}[X=10] = 0.0009765625$
   b) $\mathbb{E}[G] = 0$

g	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8	-10
x	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\mathbb{P}[X=x]$	0.0010	0.0098	0.0439	0.1172	0.2051	0.2461	0.2051	0.1172	0.0439	0.0098	0.0010

2. a) $\mathbb{P}[G=10] = \mathbb{P}[X=10] = 0.0009765625$
   b) $\mathbb{E}[G] = -2$

Réponses 7 R : au moins une fois la rouge.

1. $\mathbb{P}[R] = 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^n$
2. $\mathbb{P}[R] \geq 0.95 \iff n \geq 299$

Réponses 8 M : nombre de médecins. Nombre moyen de médecins dans le train : 1

$\Rightarrow M \sim \mathcal{P}(1)$ et $\mathbb{P}[M=0] = 0.3679$, $\mathbb{P}[M=1] = 0.3679$, $\mathbb{P}[M=2] = 0.1839$, $\mathbb{P}[M=5] = 0.0031$.

6 La loi Normale

Exercice 1 Sachant que la répartition des quotients intellectuels (QI), rapport entre l'âge mental et l'âge réel, d'une personne est une loi normale $\mathcal{N}(0,90; 0,40)$ (0,40 est la variance).

1. Calculer la probabilité à 0,0001 près, qu'une personne prise au hasard
   a) ait un QI inférieur à 1
   b) ait un QI inférieur à 0,1
   c) ait un QI supérieur à 1,4
   d) ait un QI compris entre 0,8 et 1,3
2. En déduire le nombre de personnes dans un village de 1000 habitants
   a) ayant un QI inférieur à 1
   b) ayant un QI inférieur à 0,1
   c) ayant un QI supérieur à 1,4
   d) ayant un QI compris entre 0,8 et 1,3

Exercice 2 On estime que le temps nécessaire à un étudiant pour terminer une épreuve d'examen est une variable normale $\mathcal{N}(90; 45^2)$ (45 est l'écart-type). 240 candidats se présentent à cet examen

1. Combien d'étudiants termineront l'épreuve en moins de deux heures ?
2. Quelle devrait être la durée de l'épreuve si l'on souhaite que 200 étudiants puissent terminer l'épreuve ?

Exercice 3 Le délai de livraison d'une marchandise est une v.a. normale X de moyenne $\mu = 30$ jours et d'écart-type $\sigma = 5$ jours.

1. Quelle est la probabilité pour que le délai soit compris entre 22 et 38 jours.
2. Trouver le réel x tel que dans 95 % des cas ce délai soit supérieur à x jours.

Exercice 4 L'éclairage d'une commune est assuré par 2000 lampes dont la durée de vie moyenne est 1000 heures. Les tests réalisés pour obtenir cette "espérance de vie" ont montré que la durée de vie des lampes suivait une loi normale d'écart-type estimé à 200 heures. Les services d'entretien de la commune ont besoin pour leur gestion de connaître

1. Le nombre de lampes hors d'usage au bout de 700 heures.
2. Le nombre de lampes à remplacer entre la 900e et la 1300e heure.
3. Le nombre d'heures qui se seront écoulées pour que 10 % des lampes soient hors d'usage ?

6.1 Réponses

Réponses 1 $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$

1. a) $\mathbb{P}[X \leq 1] = \mathbb{P}[U \leq 0.16] = 0.564$
   b) $\mathbb{P}[X \leq 0.1] = \mathbb{P}[U \leq -1.26] = 0.104$
   c) $\mathbb{P}[X \geq 1.4] = \mathbb{P}[U \geq 0.79] = 0.215$
   d) $\mathbb{P}[0.8 \leq X \leq 1.3] = \mathbb{P}[-0.16 \leq U \leq 0.63] = 0.3$
2. 564, 104, 215, 300.

Réponses 2 $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$

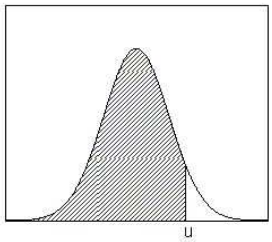
1. $\mathbb{P}[X \leq 120] = \mathbb{P}[U \leq 0.67] = 0.749$: 180 étudiants
2. $\mathbb{P}[X \leq x] = \mathbb{P}[U \leq u] = 0.833 \iff u = 0.97 \iff x = 133.65$: 2 h 14

Réponses 3

1. $\mathbb{P}[22 \leq X \leq 38] = \mathbb{P}[-1.6 \leq U \leq 1.6] = 0.890$
2. $\mathbb{P}[X \geq x] = \mathbb{P}[U \geq u] = 0.950 \iff u = -1.64 \iff x = 21.8$

Réponses 4 $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$

1. $\mathbb{P}[X \leq 700] = \mathbb{P}[U \leq -1.5] = 0.067$: 134 lampes
2. $\mathbb{P}[900 \leq X \leq 1300] = \mathbb{P}[-0.5 \leq U \leq 1.5] = 0.624$: 1248 lampes
3. $\mathbb{P}[X \leq x] = \mathbb{P}[U \leq u] = 0.100 \iff u = -1.28 \iff x = 744$: 744 h



u	*0.00*	*0.01*	*0.02*	*0.03*	*0.04*	*0.05*	*0.06*	*0.07*	*0.08*	*0.09*
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.867	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Table 1 : Probabilité illustrée par le graphique pour une variable distribuée selon une loi normale centrée réduite.

Université Paul Sabatier - Toulouse 3
IUT de Toulouse 3 A
Département GEA Rangueil

Nicolas SAVY
nicolas.savy@iut-tlse3.fr

Probabilités

Première année

Examen du 16 mai 2011

Consignes :

– Toutes les réponses doivent être justifiées.
– Une feuille format A4 Recto-Verso est autorisée pour cette épreuve.
– Seule votre calculatrice "collège" est autorisée.

1 Exercice 1

Le bridge se joue avec un jeu de cinquante-deux cartes et une "main" est formée de 13 cartes. On appelle une "main A-B-C-D" si elle est constituée de A cartes d'une couleur, B d'une autre, C d'une troisième couleur et D de la quatrième couleur. Par exemple "une main 5-4-3-1", est constituée de cinq cartes d'une couleur, quatre d'une autre, trois d'une troisième couleur et une de la quatrième couleur.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de "mains 5-4-3-1" ?
3. Combien y a-t-il de "mains 5-5-3-0" ?

2 Exercice 2

Dans un sac de dragées, 60% des dragées sont de couleur bleue, 20% des dragées sont au chocolat, 40% des dragées sont de couleur bleue et à l'amande et 30% des dragées bleues sont au chocolat.
On choisit une dragée au hasard dans le sac. On note :

- A l'évènement "La dragée est à l'amande",
- B l'évènement "La dragée est bleue",
- C l'évènement "La dragée est au chocolat".

1. Traduire les données de l'énoncé en probabilité au moyen des événements A, B et C.
2. Quelle est la probabilité de prendre une dragée bleue et au chocolat ?
3. Quelqu'un prend une dragée sans la regarder, il la mange, elle est au chocolat, quelle est la probabilité qu'elle soit bleue ?

3 Exercice 3

Un joueur lance deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que les dés sont non truqués et donc que pour chaque dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.
Le joueur suit les règles suivantes :

- Si les deux dés donnent le même numéro alors le joueur perd 10 points
- Si les deux dès donnent deux numéros de parités différentes (l'un est pair et l'autre impair) alors il perd 5 points.
- Dans les autres cas il gagne 15 points.

1. Le joueur joue une partie et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de points obtenus par lui.
   (a) Déterminez la loi de probabilité de X.
   (b) Calculez l'espérance de X.
2. Le joueur effectue 10 parties de suite. Les résultats des parties sont indépendants les uns des autres. On appelle alors Y la variable aléatoire égale au nombre de fois que le joueur gagne 15 points.
   (a) Quelle est la loi suivie par Y. Quels sont les paramètres ?
   (b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une fois 15 points ?
   (c) Combien de fois le joueur peut espérer gagner 15 points ?

3. Le joueur joue n parties de suite.
   (a) Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une fois 15 points ?
   (b) A partir de quelle valeur de n sa probabilité de gagner au moins une fois 15 points est strictement supérieure à 0,9999 ?

4 Exercice 4

Une compagnie a un contrat d'entretien pour 300 ascenseurs. On admet que, chaque semaine, la probabilité de panne d'un ascenseur est de $\frac{1}{75}$. On suppose l'indépendance entre les pannes d'un même ascenseur ainsi que de deux ascenseurs différents.

1. Soit X la variable aléatoire qui, à toute semaine, associe le nombre de pannes du parc complet des ascenseurs.
   (a) Quelle est la loi suivie par X en précisant ses paramètres.
   (b) Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité pour que lors d'une semaine il y ait (strictement) moins de 2 pannes ?
2. (a) Justifier pourquoi X peut être approchée par une variable Y suivant une loi de Poisson dont on précisera les paramètres.
   (b) En utilisant la variable Y, calculer une valeur approchée de la probabilité pour que la compagnie ait à intervenir (strictement) plus de 6 fois durant une semaine. (On arrondira le résultat à 10^{-3} près).
3. On considère la variable aléatoire Z qui, à tout adulte, usager d'ascenseurs, choisi au hasard, associe son poids en kg. On suppose que Z suit la loi normale d'espérance mathématique 70 kg et d'écart type 15 kg.
   (a) Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité pour qu'un adulte, usager d'ascenseurs, choisi au hasard, pèse moins de 90 kg.
   (b) Un ascenseur peut supporter 500 kg avant la surcharge. Les normes de sécurité spécifient que la probabilité de surcharge ne doit pas dépasser 0,001.
   On admet que le poids total de n usagers adultes d'ascenseurs, dont les poids sont indépendants, est une variable aléatoire S qui suit la loi normale d'espérance mathématique $70 \times n$ et d'écart type $15 \times \sqrt{n}$.
   Calculer les probabilités de surcharge p_6 lorsqu'il y a 6 adultes dans l'ascenseur et p_5 lorsqu'il y a 5 adultes dans l'ascenseur.
   En déduire le nombre maximal de personnes autorisées à emprunter l'ascenseur.