Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Иркутский государственный университет»

Институт математики, экономики и информатики

Е. А. Головко

# УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

руководство к решению задач

В двух частях

Часть 1

Учебное пособие

ИРКУТСК — 2014

## Оглавление

# Введение

Математическая физика занимает особое положение и в математике, и в физике, находясь на стыке этих наук. Математическая физика тесно связана с физикой в той части, которая касается построения математической модели, и в то же время математическая физика — раздел математики, поскольку методы исследования — чисто математические.

Методы математической физики, как теории математических моделей физики, начали интенсивно разрабатываться в конце XVII в. Ньютоном при создании основ классической механики, всемирного тяготения, теории света.

Дальнейшее развитие методов математической физики связано с именами Лагранжа, Эйлера, Лапласа, Фурье, Гаусса, Римана и других ученых. Большой вклад в развитие уравнений математической физики внесли Ляпунов и Стеклов.

Со второй половины XIX в. методы математической физики успешно использовались для изучения математических моделей физических явлений, связанных с различными физическими полями и волновыми функциями в электродинамике, теории упругости, гидро- и аэродинамике.

В данном курсе мы будем изучать дифференциальные уравнения с частными производными. Этот курс существенно отличается от курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения» тем, что здесь будут изучаться далеко не все уравнения, которые можно записать, используя обозначения частных производных: $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots$ . Мы ограничимся только немногими конкретными примерами уравнений и систем. Как правило, примеры, на изучении которых мы будем останавливаться, возникают в задачах математической физики. Именно этим и объясняется название курса «Уравнения математической физики».

Не надо думать, что изучаемые нами примеры случайны с точки зрения математической теории. Изучение уравнений математической физики привело к тому, что появилась классификация постановок задач, согласно которой выбранные нами уравнения являются типичными представителями наиболее важных классов. Оказалось, что для уравнений, отличающихся друг от друга на первый взгляд совсем несущественно, естественными будут совсем разные задачи. В качестве примера приведем уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

так похожие по записи, но совершенно различные по свойствам.

Дадим необходимые определения.

**Определение.** Уравнение, связывающее независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, неизвестную функцию $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и частные производные от неизвестной функции, т. е. уравнение вида

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}, \cdots\right) = 0, \qquad (1)$$

где $i_1 + \cdots + i_n = k$, $F$ — заданная функция своих аргументов, называется *уравнением с частными производными.*

**Определение.** Порядок старшей производной, входящей в уравнение (1), называется *порядком уравнения с частными производными.*

Например, уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

является уравнением второго порядка.

Уравнение с частными производными превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, если независимая переменная одна. Для обыкновенного дифференциального уравнения $n$-го порядка вся совокупность решений (за исключением возможных особых решений) представляется функцией от независимой переменной $x$, а также от $n$ произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$.

Для дифференциальных уравнений с частными производными дело обстоит сложнее.

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Пусть функция $u(x_1, \dots, x_n)$ — функция $n$ независимых переменных — удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) означает, что функция $u$ не зависит от $x_1$, т. е. $u = f(x_2, \dots, x_n)$, где $f$ — произвольная функция, зависящая от $(n-1)$-й независимой переменной.

**Пример 2.** Пусть функция $u(x, y)$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) можно переписать так:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Решая второе из этих уравнений, в силу (2) имеем

$$v = f_1(x),$$

где $f_1$ — произвольная функция переменной $x$. Далее находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1(x).$$

Следовательно,

$$u = f(x) + g(y),$$

где $f(x)$ — одна из первообразных функции $f_1$, а $g$ — произвольная функция переменной $y$. В силу произвольности $f_1$ функция $f$ является произвольной дифференцируемой функ-

цией. Однако от решения уравнения (3) естественно требовать, чтобы
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0,$$
а для этого необходимо и достаточно, чтобы функция $g(y)$ была дифференцируемой функцией. Таким образом, решение уравнения (3) дается формулой
$$u = f(x) + g(y),$$
где $f$ и $g$ — произвольные дифференцируемые функции своих переменных.

Из рассмотренных примеров видно, что в случае уравнений с частными производными решение содержит уже не произвольные постоянные, а произвольные функции. Вообще говоря, число этих произвольных функций равно порядку уравнения, а число аргументов у этих функций на единицу меньше числа аргументов искомой функции $u$.

Однако существуют классы уравнений, множества решений которых очень узки или даже пусты. Например, решением уравнения
$$\sum_{i=1}^{n} (u_{x_i})^2 = 0$$
является функция $u = const$, а уравнение
$$\sum_{i=1}^{n} (u_{x_i})^2 = -1$$
решений не имеет.

**Определение.** Определенная в области задания уравнения (1) функция $u(x_1, \ldots, x_n)$, непрерывная вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение, и обращающая его в тождество, называется *регулярным решением уравнения* (1).

Наряду с регулярными решениями в теории уравнений с частными производными важную роль играют также *элементарные, или фундаментальные решения*, т. е. решения, которые перестают быть регулярными в изолированных особых точках или на многообразиях особого вида.

**Определение.** Уравнение с частными производными, в которое искомая функция $u$ и все ее производные входят линейно, т. е. алгебраически и в первой степени, называется *линейным*.

Во всех приведенных выше примерах рассмотрены линейные уравнения. Линейное уравнение можно записать в виде

$$L[u] = f(x_1, \ldots, x_n), \tag{4}$$

где $L$ — линейный дифференциальный оператор.

**Определение.** Линейное уравнение (4) называется *однородным*, если $f(x) \equiv 0$, и *неоднородным*, если $f(x) \neq 0$.

**Определение.** Если в уравнении (1) функция $F$ линейна относительно только старших производных функции $u$, то его называют *квазилинейным*. Коэффициенты квазилинейного уравнения при старших производных могут зависеть от самой функции $u$ и ее младших производных.

Рассмотрим уравнения:

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{zz} + x^2 u_x = 0,$$

$$u_x^2 + u_{xy} + xy^2 = 0,$$

$$u_{xxy} \cdot u_{yyz} + u_x + u_z = 0.$$

Первое из этих уравнений является линейным однородным уравнением второго порядка, второе — квазилинейным уравнением второго порядка, а третье — нелинейным уравнением третьего порядка.

**Задачи для самостоятельного решения**

Выяснить, какие из следующих уравнений являются линейными (однородными или неоднородными) и какие нелинейными (квазилинейными):

1. $u_x u_{xx}^2 + 2xyuu_{xy} - 3uu_{zz} + u = 0;$
2. $u_y u_{xx} - 3x^2 u_{xy} + 2u_y - f(x, y)u = 0;$
3. $3\cos(x + y)u_{xx} - x \sin x u_{xy} + xy^2 u_{yy} + u_x = 0;$
4. $y^2 u_{xxy} + 3e^x y^2 u_{xy} + 2u_{xx} + xyu_x - 3u + 1 = 0;$
5. $u_{xy} u_{xx} - 5u_{xy} + (z^2 - x^2)u_{yz} + u_x - \cos y = 0;$
6. $a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, z)u_{zz} + d(x, y)u_x = \ln xz;$
7. $a(x, y, u, u_x)u_{xx} - b(x, y, u_{xy}u_{xy} + c(x, y.u)u_{yy} - u = 0;$
8. $u_{xyy} + u_y - 3u^2 + y = 0;$
9. $u_{xx} + 2\frac{\partial}{\partial x}(u_x^2 + u) - 6x \sin y = 0;$
10. $2xu_{xxy} - 6\frac{\partial}{\partial x}(yu^2 - xy) + u_{yy} = 0.$

## Ответы

1. Нелинейное уравнение второго порядка.
2. Квазилинейное уравнение второго порядка.
3. Линейное однородное уравнение второго порядка.
4. Линейное неоднородное уравнение третьего порядка.
5. Нелинейное уравнение второго порядка.
6. Линейное неоднородное уравнение второго порядка.
7. Нелинейное уравнение второго порядка.
8. Линейное неоднородное уравнение третьего порядка.
9. Квазилинейное уравнение второго порядка.
10. Квазилинейное уравнение третьего порядка.

# Глава 1

## Понятие характеристической формы и классификация уравнений с частными производными

Рассмотрим уравнение $k$-порядка

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}, \dots\right) = 0, \qquad (1.1)$$

$k$ — порядок старшей производной, входящей в уравнение. Обозначим

$$P_{i_1 \dots i_n} = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}, \quad i_1 + \dots + i_n = k.$$

**Определение.** Форма вида

$$K(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i_1 \cdots i_n} \frac{\partial F}{\partial P_{i_1 \dots i_n}} \lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_n^{i_n} \qquad (1.2)$$

называется *характеристической формой*, соответствующей уравнению (1.1).

**Пример 1.1.** Составить характеристическую форму для уравнения

$$u_{xx} u_{yy} + 3 u_{xx} u_x + u_x = 0.$$

Это нелинейное уравнение второго порядка.

Здесь $n = 2$,

$$F = u_{xx}u_{yy} + 3u_{xx}u_x + u_x,$$

$$P_{11} = u_{xx},$$

$$P_{12} = u_{xy},$$

$$P_{21} = u_{yx},$$

$$P_{22} = u_{yy}.$$

Составим характеристическую форму

$$K(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i_1 i_2} \frac{\partial F}{\partial P_{i_1 i_2}} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial (u_{xx})}\lambda_1^2 + \frac{\partial F}{\partial (u_{xy})}\lambda_1\lambda_2 + \frac{\partial F}{\partial (u_{yy})}\lambda_2^2 =$$
$$= (u_{yy} + 3u_x)\lambda_1^2 + u_{xx}\lambda_2^2.$$

## 1.1. Классификация линейных уравнений второго порядка

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} B_i(x_1, \ldots x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x_1, \ldots x_n) u = f, \tag{1.3}$$

где $A_{ij}(x_1, ..., x_n)$ и $f(x_1, ..., x_n)$ — заданные функции в области $D$ пространства $(x_1, \ldots x_n)$, причем $A_{ij} = A_{ji}$. Все функции и независимые переменные считаем вещественными.

Для этого уравнения характеристическая форма является квадратичной:

$$Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\lambda_i\lambda_j. \tag{1.4}$$

Из алгебры известно, что в каждой фиксированной точке существует неособое аффинное преобразование

$$\lambda_i = \lambda_i(\mu_1, \ldots, \mu_n), \tag{1.5}$$

которое приводит форму (1.4) к нормальному каноническому виду:

$$Q(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mu_i^2, \tag{1.6}$$

где $\alpha_i \in \{-1; 0; 1\}, i = 1, \ldots, n$, причем число нулей и отрицательных коэффициентов $\alpha_i$ является инвариантом аффинного преобразования и не зависит от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

На возможности приведения квадратичной формы к каноническому виду в любой точке $x$, принадлежащей некоторой области $D$, основана классификация уравнений с частными производными.

**Определение.** Уравнение (1.3) называется *уравнением эллиптического типа* в точке $x = (x_1, \ldots x_n)$, если в этой точке квадратичная форма (1.4) при приведении ее к виду (1.6) положительно или отрицательно определена, т. е. все $\alpha_i = 1$ или все $\alpha_i = -1$.

**Определение.** Уравнение (1.3) называется *уравнением гиперболического типа* в точке $x = (x_1, \ldots x_n)$, если в этой точке квадратичная форма (1.4) при приведении ее к виду (1.6) имеет все коэффициенты, кроме одного, определенного знака, а оставшийся один — противоположного знака, т. е. в форме (1.6) $\alpha_i = 1, i = 1, \ldots n, i \neq k$ и $\alpha_k = -1$ или наоборот: $\alpha_i = -1, i = 1, \ldots n, i \neq k$ и $\alpha_k = 1$.

Говорят, что уравнение (1.3) принадлежит к *ультрагиперболическому типу* в точке $x$, если в этой точке квадратичная форма (1.4) при приведении ее к виду (1.6) имеет больше одного положительного коэффициента и больше одного отрицательного, причем все коэффициенты отличны от нуля.

**Определение.** Уравнение (1.3) называется уравнением *параболического типа* в точке $x$, если в этой точке в квадратичной форме (1.6) хотя бы один (но не все) из коэффициентов $\alpha_i$ равен нулю.

**Определение.** Говорят, что уравнение (1.3) *эллиптично, гиперболично или параболично в области* $D$, если оно эллиптично, гиперболично или параболично в каждой точке этой области.

Итак, чтобы определить тип уравнения с частными производными второго порядка, необходимо составить характеристическую форму (она в этом случае является квадратичной) и привести ее к каноническому нормальному виду. Напомним один из методов приведения квадратичной формы к каноническому виду.

### Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

Рассмотрим квадратичную форму

$$Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j. \tag{1.7}$$

Метод основан на двух утверждениях.

**Утверждение 1.** Пусть в форме (1.7) хотя бы один из коэффициентов $a_{ii}$ отличен от нуля. Без ограничения общности пусть $a_{11} \neq 0$. Тогда форма вида

$$Q - \frac{1}{a_{11}}(a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1n}\lambda_n)^2 = g(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

является квадратичной формой, зависящей от $(n-1)$-го параметра.

**Утверждение 2.** Пусть в форме (1.7) все коэффициенты $a_{ii}, i = 1, \dots, n$, равны нулю. Без ограничения общности пусть $a_{12} \neq 0$. Тогда невырожденное преобразование

$$\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2,$$

$$\lambda_2 = \mu_1 - \mu_2,$$

$$\lambda_3 = \mu_3, \dots, \lambda_n = \mu_n$$

приводит к появлению квадратов, т. е.

$$Q(\mu_1, \dots, \mu_n) = a_{12}(\mu_1^2 - \mu_2^2) + \cdots\ .$$

Приведем несколько примеров.

**Пример 1.2.** Определить тип уравнения

$$2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y - u = 0.$$

Составим характеристическую форму

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = 2\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 =$$

$=$ {за базовый элемент лучше взять $\lambda_2$, подчеркнем все слагаемые, содержащие базовый элемент $\lambda_2$} $=$

$$= 2\lambda_1^2 + \underbrace{2\lambda_1\lambda_2} + \underbrace{\lambda_2^2} =$$

$=${выписываем подчеркнутые слагаемые и добавляем необходимые слагаемые до полного квадрата, далее вычитаем те слагаемые, которые искусственно добавили, дописываем оставшиеся (не подчеркнутые) слагаемые} $=$

$$= (2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2) - \lambda_1^2 + 2\lambda_1^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \lambda_1^2.$$

Введем новые переменные

$$\mu_1 = \lambda_1,$$

$$\mu_2 = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Итак, запишем характеристическую форму в нормальном виде

$$Q(\mu_1, \mu_2) = \mu_1^2 + \mu_2^2.$$

Следовательно, рассматриваемое уравнение является уравнением эллиптического типа.

**Пример 1.3.** Определить тип уравнения

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + 2u_{xz} + u_{zz} - 2xyu_x + yu = 0.$$

Составим характеристическую форму и приведем ее к нормальному виду

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 - 4\lambda_1\lambda_2 + 4\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3^2 =$$

$$= \underbrace{\lambda_1^2} - \underbrace{4\lambda_1\lambda_2} + 4\lambda_2^2 + \underbrace{2\lambda_1\lambda_3} + \lambda_3^2 =$$

$$= (\lambda_1^2 - 4\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_3 + 4\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 4\lambda_2\lambda_3) -$$

$$-4\lambda_2^2 - \lambda_3^2 + 4\lambda_2\lambda_3 + 4\lambda_2^2 + \lambda_3^2 =$$

$$= (\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3)^2 + 4\lambda_2\lambda_3.$$

Введем новые переменные

$$\mu_1 = \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3,$$

$$\mu_2 = \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$\mu_3 = \lambda_2 - \lambda_3.$$

Получим характеристическую форму в нормальном виде

$$Q(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2.$$

Следовательно, рассматриваемое уравнение является уравнением гиперболического типа.

**Пример 1.4.** Определить тип уравнения

$$u_{xy} + u_{yz} + u_{xz} + 2u_z - yu_x + u = 0.$$

Составим характеристическую форму и приведем ее к нормальному виду:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3.$$

В данном случае наша квадратичная форма не содержит ни одного квадрата. Поэтому применяем утверждение 2. Введем новые переменные

$$\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2,$$

$$\lambda_2 = \mu_1 - \mu_2,$$

$$\lambda_3 = \mu_3.$$

Получим квадратичную форму, которая содержит квадраты переменных

$$Q(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mu_1^2 - \mu_2^2 + \mu_1\mu_3 - \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 =$$

$$= \mu_1^2 - \mu_2^2 + 2\mu_1\mu_3 = (\mu_1^2 + 2\mu_1\mu_3 + \mu_3^2) - \mu_3^2 - \mu_2^2 =$$

$$= (\mu_1 + \mu_3)^2 - \mu_3^2 - \mu_2^2.$$

Введем еще раз новые переменные

$$\nu_1 = \mu_1 + \mu_3,$$

$$\nu_2 = \mu_2,$$

$$\nu_3 = \mu_3.$$

Получим характеристическую форму в нормальном виде

$$Q(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_3^2.$$

Следовательно, рассматриваемое уравнение является уравнением гиперболического типа.

Существуют уравнения, которые меняют тип при переходе из одной подобласти области $D$ в другую. Такие уравнения иногда называют уравнениями смешанного типа.

**Пример 1.5.** Определить тип уравнения

$$xu_{xx} + yu_{yy} + 2u = 0.$$

Составим характеристическую форму

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = x\lambda_1^2 + y\lambda_2^2.$$

Очевидно, данное уравнение является уравнением эллиптического типа, если $x$ и $y$ одного знака, т. е. при $x < 0$ и $y < 0$ или при $x > 0$ и $y > 0$; уравнением гиперболического типа, если $x$ и $y$ разных знаков, т. е. при $x < 0$ и $y > 0$ или при $x > 0$ и $y < 0$; уравнением параболического типа при $x = 0, y \neq 0$ или при $x \neq 0, y = 0$. В точке $(0, 0)$ уравнение вырождается.

## 1.2. Классификация нелинейных уравнений второго порядка

Так как у нелинейных уравнений коэффициенты характеристической формы зависят от функции $u$ и ее производных, то их классификация проводится вдоль конкретных решений. Причем вдоль разных решений уравнение может относиться к разным типам.

**Пример 1.6.** Вдоль соответствующих решений определить тип уравнения

$$u_{xx} + u_{xy}u_{yy} + u_{yy}^2 - 4u_{yy} = 0, u_1 = 2y^2, u_2 = 5xy.$$

Составим характеристическую форму

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 + u_{yy}\lambda_1\lambda_2 + (u_{xy} + 2u_{yy} - 4)\lambda_2^2.$$

Коэффициенты характеристической формы зависят от производных функции $u$. Найдем эти производные для данных решений:

1) для первого решения $u_1 = 2y^2$.

$$(u_1)_{yy} = 4,$$

$$(u_1)_{xy} = 0.$$

Подставив найденные производные в характеристическую форму $Q$, получим

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2 + (0 + 8 - 4)\lambda_2^2 = \lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2 + 4\lambda_2^2 =$$

$$= (\lambda_1 + 2\lambda_2)^2.$$

Чтобы привести эту квадратичную форму к нормальному каноническому виду, введем новые переменные

$$\mu_1 = \lambda_1 + 2\lambda_2,$$

$$\mu_2 = \lambda_2.$$

Тогда получим

$$Q(\mu_1, \mu_2) = \mu_1^2.$$

Следовательно, рассматриваемое уравнение является уравнением параболического типа вдоль решения $u_1 = 2y^2$;

2) аналогично рассматриваем второе решение $u_2 = 5xy$.

$$(u_2)_{yy} = 0,$$

$$(u_2)_{xy} = 5.$$

Подставив найденные производные в характеристическую форму $Q$, получим

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 + (5 + 0 - 4)\lambda_2^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2.$$

Следовательно, рассматриваемое уравнение является уравнением эллиптического типа вдоль решения $u_2 = 5xy$.

## 1.3. Классификация систем линейных уравнений с частными производными первого порядка

Ограничимся случаем систем двух линейных уравнений с частными производными первого порядка с двумя неизвестными функциями. В самом общем виде эту систему можно записать так:

$$\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_n, u, v, u_{x_1}, ..., u_{x_n}, v_{x_1}, ..., v_{x_n}) = 0, \\ F_2(x_1, ..., x_n, u, v, u_{x_1}, ..., u_{x_n}, v_{x_1}, ..., v_{x_n}) = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Системы классифицируют по виду характеристического определителя.

**Определение.** *Характеристическим определителем* системы (1.8) называют определитель вида

$$Q(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial(u_{x_i})}\lambda_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial(v_{x_i})}\lambda_i \\ \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial(u_{x_i})}\lambda_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial(v_{x_i})}\lambda_i \end{vmatrix}.$$

Чтобы определить тип системы, необходимо раскрыть характеристический определитель и полученную квадратичную форму привести к каноническому нормальному виду. Деление систем по типам происходит по характеру квадратичной формы точно так же, как это было сделано выше при рассмотрении одного уравнения второго порядка.

**Пример 1.7.** Определить тип системы

$$\begin{cases} 2u_x + 3u_y - 3v_y + 4u = 0, \\ -u_x + u_y + v_x - y^2 = 0. \end{cases}$$

Составим характеристический определитель

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{vmatrix} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 & -3\lambda_2 \\ \\ -\lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель и приведем полученную квадратичную форму к каноническому виду:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = (2\lambda_1 + 3\lambda_2)(\lambda_1) - (-\lambda_1 + \lambda_2)(-3\lambda_2) =$$

$$= 2\lambda_1^2 + 3\lambda_2\lambda_1 - 3\lambda_2\lambda_1 + 3\lambda_2^2 =$$

$$= 2\lambda_1^2 + 3\lambda_2^2.$$

Введем новые переменные

$$\mu_1 = \sqrt{2}\lambda_1,$$

$$\mu_2 = \sqrt{3}\lambda_2.$$

Получим

$$Q(\mu_1, \mu_2) = \mu_1^2 + \mu_2^2.$$

Следовательно, система относится к эллиптическому типу.

**Пример 1.8 (пример выполнения задачи 1).**

Определить тип системы

$$\begin{cases} u_x + u_y + v_y + v_z - u = 0, \\ v_x - u_y - v_y + u_z + 5xy = 0. \end{cases}$$

Составим характеристический определитель

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 + \lambda_3 \\ \\ -\lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель и приведем полученную квадратичную форму к каноническому виду. В этом случае квадратичная форма зависит от трех параметров, так как неизвестные функции в системе зависят от трех независимых переменных:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda_2 + \lambda_3)(-\lambda_2 + \lambda_3) =$$

$$= \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - (\lambda_3^2 - \lambda_2^2) = \lambda_1^2 - \lambda_3^2,$$

следовательно, рассматриваемая система является системой параболического типа.

## 1.4. Индивидуальные задания к главе 1

### Задача 1

Определить тип следующих систем:

1.1. $$\begin{cases} 2u_x + 3u_y - v_y + 3v_z - u = 0, \\ v_x - 3u_y - 2v_y + u_z + y = 0. \end{cases}$$

1.2. $$\begin{cases} u_x - u_y - 2v_y + v_z - x = 0, \\ u_x + 2u_y + v_x - v_z + 1 = 0. \end{cases}$$

1.3. $$\begin{cases} u_x - u_y + u_z - 2v_y + v_z = 0, \\ 2u_x + u_y + 3v_x - v_z + v = 0. \end{cases}$$

1.4. $$\begin{cases} u_z - 2u_y + 2v_y + v_x - 3v = 0, \\ 2u_x + u_y - v_z + \sin x = 0. \end{cases}$$

1.5. $$\begin{cases} 3u_x + u_y + v_z - x = 0, \\ u_z + u_y + 2v_x + v_z + zx = 0. \end{cases}$$

1.6. $$\begin{cases} u_x - u_z - v_y + v_x - u = 0, \\ 4u_x + u_y + v_x - v_z + v = 0. \end{cases}$$

1.7. $$\begin{cases} u_x + 2u_y + v_x - v_z = 0, \\ 2u_x + u_z - v_x - v_y + v = 0. \end{cases}$$

1.8. $$\begin{cases} u_x - 2u_z + v_y + 2v_z + u = 0, \\ 3u_x - u_z + v_y - 2v_z + v = 0. \end{cases}$$

1.9. $\begin{cases} 4u_y - v_y + 2v_x - z = 0, \\ u_z + 2u_y + v_y - 2v_z + 1 = 0. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} 3u_x - 2u_z - v_x + 2v_z - v = 0, \\ u_x + 2u_z + v_x - v_y + u = 0. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 2u_x + 3u_y - 2v_x + v_z - zy = 0, \\ u_x + 2u_y + v_x - v_z = 0. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} u_y - 3u_z - 2v_x + v_y = 0, \\ 2u_x + u_y + 3v_x - v_z = 0. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 3u_x + u_y - 2v_x + v_z - 2x = 0, \\ u_y - 2u_z + v_y + v_z = 0. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} u_z + 3v_y + 2v_z + 2y = 0, \\ 4u_x + u_y - v_x - v_z + e^x = 0. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} u_x + u_z - v_y + 2v_z + \operatorname{tg} y = 0, \\ u_y - u_z + 3v_x - v_y - 3 = 0. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} u_z + 4u_y - v_y + 2v_x - 5zy = 0, \\ 4u_x + u_y + 2v_x - v_z = 0. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} 3u_y + u_z + 2v_x - v_z - \ln y = 0, \\ u_x - u_y + 3v_y - 2v_z + 3z = 0. \end{cases}$

1.18. $$\begin{cases} 3u_y + u_z - v_y + v_x - 6yz = 0, \\ u_x - 2u_z + 3v_x - v_y = 0. \end{cases}$$

1.19. $$\begin{cases} 4u_x - u_z + 3v_x + v_z = 0, \\ u_z + 3u_y + 2v_x - v_y + 5 = 0. \end{cases}$$

1.20. $$\begin{cases} 4u_x - u_z + 2v_x + 2v_y - zyx = 0, \\ 3u_x - u_z + 2v_x - 4v_y = 0. \end{cases}$$

1.21. $$\begin{cases} 3u_x - u_y - 2v_y + v_z - 3y = 0, \\ u_x + 2u_y + v_x - v_z + v = 0. \end{cases}$$

1.22. $$\begin{cases} u_y - u_z - v_y + 2v_z = 0, \\ 2u_x + 2u_y + v_x - 3v_z + u = 0. \end{cases}$$

1.23. $$\begin{cases} 4u_x - u_y + v_y + v_x + v = 0, \\ u_x + u_y + 2v_x - v_z = 0. \end{cases}$$

1.24. $$\begin{cases} 3u_x - u_z - 2v_x + v_z - 6x = 0, \\ u_x + u_y + v_x + v_z = 0. \end{cases}$$

1.25. $$\begin{cases} 2u_x - 3u_y - 2v_x + v_z - u = 0, \\ u_x - u_z + 3v_x - v_z + v = 0. \end{cases}$$

# Глава 2

# Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка

## 2.1. Характеристические кривые и характеристические направления

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x_1,\ldots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \\ + C(x_1,\ldots x_n)u = f(x_1,...,x_n), \tag{2.1}$$

где $A_{ij}, B_i, C$ и $f$ — заданные функции в области $D$ пространства $(x_1,\ldots x_n)$, причем $A_{ij} = A_{ji}$. Все функции и независимые переменные считаем вещественными.

Для этого уравнения составим характеристическую форму

$$Q(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\lambda_i\lambda_j.$$

Знаем, что в любой точке $x$ некоторой области $D$ квадратичная форма $Q$ может быть приведена к каноническому виду. В соответствии с этим в каждой фиксированной точке $x \in D$ можно найти неособое преобразование независимых переменных $x_i = x_i(\xi_1, \ldots, \xi_n), i = 1, \ldots, n$, в результате которого уравнение (2.1) приводится к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{n} \left( \alpha_i \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} + \beta_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \right) + \gamma u = \delta,$$

где $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$. Функции $\beta_i, \gamma, \delta$ выражаются через коэффициенты уравнения (2.1).

Отметим, что не всегда можно найти преобразование независимых переменных, позволяющее привести уравнение (2.1) к каноническому виду не только во всей области задания уравнения, но и в окрестности данной точки. Исключение составляет случай двух независимых переменных.

Пусть $u = u(x, y)$. Уравнение (2.1) тогда примет вид

$$\begin{gathered} A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + L[u] = f(x,y), \end{gathered} \tag{2.2}$$

где $L[u]$ — линейный дифференциальный оператор с частными производными первого порядка.

**Определение.** Кривая $\varphi(x, y) = const$, где $\varphi$ — решение уравнения

$$\begin{gathered} A(x,y)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \\ + C(x,y)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0, \end{gathered} \tag{2.3}$$

называется *характеристической кривой* уравнения (2.1), а направление, определяемое из уравнения

$$A(x,y)dy^2 - 2B(x,y)dxdy + C(x,y)dx^2 = 0, \tag{2.4}$$

называется *характеристическим направлением.*

Установим связь между уравнениями (2.3) и (2.4).

**Утверждение.** Функция $\varphi = \varphi(x,y)$ является решением уравнения (2.3) тогда и только тогда, когда $\varphi = C$ является интегралом уравнения (2.4).

Действительно, разложив левую часть уравнения (2.3) на множители, получим

$$(\alpha_1\varphi_x + \beta_1\varphi_y)(\alpha_2\varphi_x + \beta_2\varphi_y) = 0. \tag{2.5}$$

Или

$$\alpha_1\alpha_2\varphi_x^2 + (\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2)\varphi_x\varphi_y + \beta_1\beta_2\varphi_y^2 = 0.$$

Сравнивая последнее равенство с уравнением (2.3), будем иметь

$$A = \alpha_1\alpha_2, \quad 2B = \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2, \quad C = \beta_1\beta_2. \tag{2.6}$$

Из уравнения (2.5) получаем два уравнения с частными производными первого порядка

$$\alpha_1\varphi_x + \beta_1\varphi_y = 0, \; \alpha_2\varphi_x + \beta_2\varphi_y = 0. \tag{2.7}$$

Из теории уравнений с частными производными первого порядка знаем, что функции $\varphi = \varphi_1(x,y)$, $\varphi = \varphi_2(x,y)$ являются решениями уравнений (2.7) тогда и только тогда, когда

$\varphi_1 = C$ и $\varphi_2 = C$ являются интегралами обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{\alpha_1} = \frac{dy}{\beta_1}, \quad \frac{dx}{\alpha_2} = \frac{dy}{\beta_2}.$$

Последние два уравнения можно переписать в одно

$$\left(\frac{dx}{\alpha_1} - \frac{dy}{\beta_1}\right)\left(\frac{dx}{\alpha_2} - \frac{dy}{\beta_2}\right) = 0.$$

Или

$$\alpha_1\alpha_2 dy^2 - (\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2)dxdy + \beta_1\beta_2 dx^2 = 0.$$

Учитывая (2.6), получим

$$A(x,y)dy^2 - 2B(x,y)dxdy + C(x,y)dx^2 = 0.$$

Утверждение доказано.

Составим характеристическую форму для уравнения (2.2):

$$Q(\lambda_1,\lambda_2) = A(x,y)\lambda_1^2 + 2B(x,y)\lambda_1\lambda_2 + C(x,y)\lambda_2^2.$$

Зафиксируем точку $(x,y)$ и приведем форму $Q$ к каноническому виду. Пусть $A \neq 0$, тогда форму $Q$ можно преобразовать так:

$$Q(\lambda_1,\lambda_2) = A\left(\lambda_1^2 + 2\frac{B}{A}\lambda_1\lambda_2 + \frac{C}{A}\lambda_2^2\right) =$$

$$= A\left(\left(\lambda_1^2 + 2\frac{B}{A}\lambda_1\lambda_2 + \frac{B^2}{A^2}\lambda_2^2\right) - \frac{B^2}{A^2}\lambda_2^2 + \frac{C}{A}\lambda_2^2\right) =$$

$$= A\left(\left(\lambda_1 + \frac{B}{A}\lambda_2\right)^2 - \frac{B^2 - AC}{A^2}\lambda_2^2\right).$$

Таким образом, канонический вид характеристической формы для уравнения с двумя независимыми переменными (2.2) зависит от знака выражения $B^2 - AC$, называемого дискриминантом.

1. Если $B^2 - AC < 0$, то уравнение относится к эллиптическому типу.

2. Если $B^2 - AC = 0$, то уравнение относится к параболическому типу.

3. Если $B^2 - AC > 0$, то уравнение относится к гиперболическому типу.

Итак, для того чтобы определить тип линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными, нет необходимости выписывать характеристическую форму и приводить ее к каноническому виду, достаточно посчитать знак выражения $B^2 - AC$.

## 2.2. Приведение к каноническому виду линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &+ \\ + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &+ F(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $A, B, C$ — заданные дважды непрерывно дифференцируемые по $x$ и $y$ функции, $F$ — заданная функция своих аргументов.

В уравнении (2.8) введем новые независимые переменные

$$\xi = \xi(x, y),$$

$$\eta = \eta(x, y),$$

где $\xi$ и $\eta$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции и такие, что в области задания уравнения (2.8) якобиан

$$J(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

ни в одной точке в ноль не обращается. Очевидно, что $x$ и $y$ можно выразить через $\xi$ и $\eta$:

$$x = x(\xi, \eta),$$

$$y = y(\xi, \eta).$$

Наша функция $u$ будет зависеть от переменных $\xi$ и $\eta$, которые в свою очередь зависят от $x$ и $y$. Пересчитаем производные, входящие в уравнение (2.8), используя правило дифференцирования сложной функции:

$$\begin{array}{r|l}
 & u = u(\xi(x, y), \eta(x, y)), \\
 & u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\
 & u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\
A & u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\
 & u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y + u_{\eta\xi}\xi_y\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_y\eta_x + \\
2B & \qquad + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \\
C & u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.
\end{array}$$

Здесь слева от черты стоят коэффициенты, на которые соответствующие производные умножаются в уравнении (2.8). Поскольку явные выражения для младших производных нас пока не интересуют, мы их не будем приводить.

Подставим найденные производные в уравнение (2.8), приведем подобные слагаемые и получим

$$\begin{gathered} u_{\xi\xi}\left[A(\xi_x)^2+2B\xi_x\xi_y+C(\xi_y)^2\right]+ \\ +u_{\xi\eta}\left[2A\xi_x\eta_x+2C\xi_y\eta_y+2B(\eta_y\xi_x+\xi_y\eta_x)\right]+ \\ +u_{\eta\eta}\left[A(\eta_x)^2+2B\eta_x\eta_y+C(\eta_y)^2\right]+F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=0. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Заметим, что если в качестве $\xi$ и $\eta$ взять решения уравнения

$$A(\varphi_x)^2+2B\varphi_x\varphi_y+C(\varphi_y)^2=0, \tag{2.10}$$

то уравнение (2.9) значительно упростится. Из предыдущего параграфа знаем, что уравнение (2.10) — это уравнение характеристических кривых. Чтобы его решить и найти характеристические кривые (или характеристики) уравнения (2.8), необходимо решить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0. \tag{2.11}$$

Последнее уравнение является уравнением второй степени первого порядка. Разрешим его как квадратное уравнение относительно $dy$

$$dy=\frac{B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}dx. \tag{2.12}$$

Таким образом, видим, что решения уравнения (2.10) зависят от знака дискриминанта. Рассмотрим различные случаи.

1. $B^2 - AC > 0$, т. е. уравнение (2.8) является уравнением гиперболического типа. В этом случае уравнения (2.12) — это два вещественных различных дифференциальных уравнения. Решив их, получим два вещественных интеграла

$$\varphi(x, y) = C_1, \quad \psi(x, y) = C_2,$$

которые и являются характеристиками уравнения (2.8). Если в качестве $\xi$ и $\eta$ взять функции $\varphi$ и $\psi$, то уравнение примет вид

$$u_{\xi\eta}\left[2A\xi_x\eta_x + 2C\xi_y\eta_y + 2B(\eta_y\xi_x + \xi_y\eta_x)\right] + F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0.$$

Поделив на коэффициент при $u_{\xi\eta}$, имеем

$$u_{\xi\eta} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0. \tag{2.13}$$

Это первый канонический вид для уравнений гиперболического типа.

Вводя новые переменные

$$\xi_1 = \xi + \eta, \quad \eta_1 = \xi - \eta,$$

получим второй канонический вид для уравнений гиперболического типа

$$u_{\xi_1\xi_1} - u_{\eta_1\eta_1} + \tilde{F}(\xi_1, \eta_1, u, u_{\xi_1}, u_{\eta_1}) = 0.$$

**Определение.** Переменные $\xi$ и $\eta$, введенные с помощью характеристик уравнения (2.8), называются *характеристическими переменными.*

2. $B^2 - AC < 0$, т. е. уравнение (2.8) является уравнением эллиптического типа. В этом случае (2.12) — это пара комплексно-сопряженных дифференциальных уравнений. Интегралы этих уравнений

$$\varphi(x,y) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y),$$

$$\varphi(x,y) = \alpha(x,y) - i\beta(x,y)$$

также комплексно сопряжены.

Если новые переменные ввести, как и в предыдущем случае:

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y),$$

в результате уравнение (2.9) примет вид

$$u_{\xi\eta} + \tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0. \tag{2.14}$$

Но в отличие от уравнения (2.13), в уравнении (2.14) $\xi$ и $\eta$ — комплексные переменные. Желая остаться в области вещественных переменных, введем новые независимые переменные

$$\xi_1 = \frac{\xi+\eta}{2}, \quad \eta_1 = \frac{\xi-\eta}{2i}.$$

Пересчитаем в новых переменных производные, входящие в уравнение (2.14):

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial \eta_1}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \eta_1}\left(-\frac{1}{i}\right) + \frac{1}{i}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} + \right.$$

$$+\frac{1}{i}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2}\left(-\frac{1}{i}\right)\Bigg) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2}\right).$$

В новых переменных уравнение (2.14) перепишется так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2} + \tilde{F}(\xi_1, \eta_1, u, u_{\xi_1}, u_{\eta_1}) = 0.$$

Это канонический вид уравнений эллиптического типа. Заметим, что

$$\xi_1 = \frac{\xi + \eta}{2} = Re\varphi(x, y) = \alpha(x, y),$$

$$\eta_1 = \frac{\xi - \eta}{2i} = Im\varphi(x, y) = \beta(x, y).$$

Поэтому при приведении к каноническому виду уравнений эллиптического типа в качестве новых переменных можно сразу брать соответственно вещественную и мнимую части одного из комплексно-сопряженных интегралов уравнения характеристик.

3. Пусть теперь $B^2 - AC = 0$, т. е. уравнение (2.8) является уравнением параболического типа. Очевидно, что если $B \neq 0$, то $A$ и $B$ не обращаются в ноль. Уравнения (2.12) принимают вид

$$dy = \frac{B}{A}dx,$$

т. е. имеем только одно вещественное уравнение. Оно имеет общий интеграл

$$\varphi(x, y) = C.$$

В качестве $\xi$ возьмем функцию $\varphi(x, y)$

$$\xi = \varphi(x, y).$$

При таком выборе $\xi$ коэффициент при $u_{\xi\xi}$ в уравнении (2.9) обратится в ноль. Покажем, что при таком выборе $\xi$ коэффициент при $u_{\xi\eta}$ также будет равен нулю. Преобразуем коэффициент при $u_{\xi\eta}$ уравнения (2.9):

$$2A\xi_x\eta_x + 2C\xi_y\eta_y + 2B(\eta_y\xi_x + \xi_y\eta_x) =$$

$$= \eta_x(A\xi_x + B\xi_y) + \eta_x(B\xi_x + C\xi_y).$$

Так как $\xi$ — решение уравнения (2.10), то имеем тождество

$$A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \equiv 0.$$

Умножим это тождество на $A$ и, учитывая, что $B^2 - AC = 0$, получим

$$A^2\xi_x^2 + 2AB\xi_x\xi_y + AC\xi_y^2 \equiv 0.$$

Или

$$A^2\xi_x^2 + 2AB\xi_x\xi_y + B^2\xi_y^2 \equiv 0,$$

$$(A\xi_x + B\xi_y)^2 \equiv 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$B\xi_x + C\xi_y \equiv 0.$$

Таким образом, в уравнении (2.9) при указанном выше выборе переменной $\xi$ и любом выборе переменной $\eta$ коэффициенты при $u_{\xi\xi}$ и $u_{\xi\eta}$ равны нулю.

В качестве $\eta$ возьмем любую функцию $\eta = \psi(x, y)$, такую, что

$$J(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Понятно, что при этом коэффициент при $u_{\eta\eta}$ будет отличен от нуля. Поделив на него, получим канонический вид для уравнений параболического типа

$$u_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0.$$

Подведем итог. Для того чтобы привести к каноническому виду линейное уравнение с частными производными второго порядка

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{2.15}$$

необходимо:

1. Определить коэффициенты $A, B, C$.

2. Вычислить выражение $B^2 - AC$.

3. Сделать вывод о типе уравнения (2.15) (в зависимости от знака выражения $B^2 - AC$).

4. Записать уравнение характеристик

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0. \tag{2.16}$$

5. Решить уравнение (2.16). Для этого:

1) разрешить уравнение (2.16) как квадратное уравнение относительно $dy$

$$dy = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} dx; \tag{2.17}$$

2) найти общие интегралы уравнений (2.17) (характеристики уравнения (2.15)):

а) в случае уравнения гиперболического типа

$$\varphi(x,y) = C_1, \quad \psi(x,y) = C_2;$$

б) в случае уравнения эллиптического типа

$$\varphi(x,y) \equiv \alpha(x,y) + i\beta(x,y) = C,$$

$$\varphi(x,y) \equiv \alpha(x,y) - i\beta(x,y) = C;$$

в) в случае уравнения параболического типа

$$\varphi(x,y) = C.$$

6. Ввести новые (характеристические) переменные $\xi$ и $\eta$:

а) в случае уравнения гиперболического типа в качестве $\xi$ и $\eta$ берут левые части общих интегралов уравнений (2.17), т. е.

$$\xi = \varphi(x,y), \qquad \eta = \psi(x,y);$$

б) в случае уравнения параболического типа в качестве $\xi$ берут левую часть общего интеграла уравнения (2.17), т. е.

$$\xi = \varphi(x,y),$$

в качестве $\eta$ берут произвольную, дважды дифференцируемую функцию, не выражающуюся через $\xi$, т. е.

$$\eta = \psi(x,y),$$

где $\psi(x,y)$, такая, что

$$J(\varphi,\psi) = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0;$$

в) в случае уравнения эллиптического типа в качестве $\xi$ и $\eta$ берут вещественную и мнимую часть любого из общих интегралов уравнений (2.17):

$$\xi = Re(\alpha(x, y) + i\beta(x, y)) = \alpha(x, y),$$

$$\eta = Im(\alpha(x, y) + i\beta(x, y)) = \beta(x, y).$$

7. Пересчитать все производные, входящие в уравнение (2.15), используя правило дифференцирования сложной функции:

$$\begin{array}{r|l}
 & u = u(\xi(x, y), \eta(x, y)), \\
 & u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\
 & u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\
A & u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\
2B & u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y + u_{\eta\xi}xi_y\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_y\eta_x + \\
 & \qquad + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \\
C & u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.
\end{array}$$

8. Подставить найденные производные в исходное уравнение (2.15) и привести подобные слагаемые. Для этого слева расставляем коэффициенты, на которые соответствующие производные умножаются в уравнении, и сразу собираем подобные слагаемые. В результате уравнение (2.15) примет один из следующих видов:

а) в случае уравнения гиперболического типа

$$u_{\xi\eta} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0;$$

б) в случае уравнения параболического типа

$$u_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0;$$

в) в случае уравнения эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0.$$

**Пример 2.1 (пример выполнения задачи 2).**

Определить тип уравнения

$$u_{xx} - 4u_{xy} - 21u_{yy} - 3u_y + u = x^2$$

и привести его к каноническому виду.

1. Определим коэффициенты $A, B, C$:

$$A = 1, \quad B = -2, \quad C = -21.$$

2. Вычислим выражение $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = 4 + 21 = 25.$$

3. Определим тип уравнения (в зависимости от знака выражения $B^2 - AC$):

$$B^2 - AC = 25 > 0,$$

т. е. уравнение является уравнением гиперболического типа.

4. Запишем уравнение характеристик

$$dy^2 + 4dxdy - 21dx^2 = 0.$$

5. Решим уравнение характеристик. Для этого:

1) разрешим уравнение характеристик как квадратное уравнение относительно $dy$:

$$dy = \frac{-2 \pm \sqrt{25}}{1} dx;$$

$$dy = (-2 \pm 5) dx;$$

$$dy = -7dx, \quad dy = 3dx;$$

2) найдем общие интегралы полученных уравнений (характеристики исходного уравнения):

$$y + 7x = C_1, \quad y - 3x = C_2.$$

6. Введем характеристические переменные

$$\xi = y + 7x, \quad \eta = y - 3x.$$

7. Пересчитаем все производные, входящие в исходное уравнение, используя правило дифференцирования сложной функции. Для удобства найдем $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$:

$$\begin{aligned} &\xi_x = 7, && \xi_y = 1, \\ &\eta_x = -3, && \eta_y = 1. \end{aligned}$$

Производные второго порядка от $\xi$ и $\eta$ равны нулю.

$$\begin{array}{r|l} 1 & u = u(\xi(x, y), \eta(x, y)), \\ 0 & u_x = 7u_\xi - 3u_\eta, \\ -3 & u_y = u_\xi + u_\eta, \\ 1 & u_{xx} = 49u_{\xi\xi} - 42u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}, \\ -4 & u_{xy} = 7u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} - 3u_{\eta\eta}, \\ -21 & u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}. \end{array}$$

Здесь слева записаны коэффициенты исходного уравнения при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим

$$u_{\xi\xi}\{49-28-21\}+u_{\xi\eta}\{-42-16-42\}+u_{\eta\eta}\{9+12-21\}+$$
$$+u_{\xi}\{-3\}+u_{\eta}\{-3\}+u=\frac{(\xi-\eta)^2}{100}.$$

Или после деления на $-100$ (коэффициент при $u_{\xi\eta}$)

$$u_{\xi\eta}+0,03u_{\xi}+0,03u_{\eta}-0,01u=-\frac{(\xi-\eta)^2}{10000}.$$

**Ответ.** Исходное уравнение является уравнением гиперболического типа на всей плоскости $XOY$. Канонический вид

$$u_{\xi\eta}+0,03u_{\xi}+0,03u_{\eta}-0,01u=-\frac{(\xi-\eta)^2}{10000},$$

где $\xi=y+7x, \quad \eta=y-3x.$

**Пример 2.2 (пример выполнения задачи 3).**

Определить тип уравнения

$$25u_{xx}-10u_{xy}+u_{yy}+u_y+2u=5y+2x$$

и привести его к каноническому виду.

1. Определим коэффициенты $A, B, C$:

$$A=25, \quad B=-5, \quad C=1.$$

2. Вычислим выражение $B^2-AC$:

$$B^2-AC=25-25=0.$$

3. Определим тип уравнения (в зависимости от знака выражения $B^2-AC$):

$$B^2-AC=0,$$

т. е. уравнение является уравнением параболического типа.

4. Запишем уравнение характеристик

$$25dy^2 + 10dxdy + dx^2 = 0.$$

5. Решим уравнение характеристик. Для этого:

1) разрешим уравнение характеристик как квадратное уравнение относительно $dy$. Однако в этом случае левая часть уравнения является полным квадратом

$$(5dy + dx)^2 = 0;$$

$$5dy = -dx;$$

2) имеем только одно обыкновенное дифференциальное уравнение. Найдем его общий интеграл (уравнения параболического типа имеют только одно семейство вещественных характеристик):

$$5y + x = C.$$

6. Введем характеристические переменные: одну из переменных вводим, как и ранее,

$$\xi = 5y + x,$$

а в качестве $\eta$ берем произвольную, дважды дифференцируемую функцию, не выражающуюся через $\xi$, пусть

$$\eta = x.$$

7. Пересчитаем все производные, входящие в исходное уравнение, используя правило дифференцирования сложной функ-

ции. Для удобства найдем $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$:

$$\xi_x = 1, \qquad \xi_y = 5,$$
$$\eta_x = 1, \qquad \eta_y = 0.$$

Производные второго порядка от $\xi$ и $\eta$ равны нулю.

$$\begin{array}{r|l} 2 & u = u(\xi(x,y), \eta(x,y)), \\ 0 & u_x = u_\xi + u_\eta, \\ 1 & u_y = 5u_\xi, \\ 25 & u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\ -10 & u_{xy} = 5u_{\xi\xi} + 5u_{\xi\eta}, \\ 1 & u_{yy} = 25u_{\xi\xi}. \end{array}$$

Здесь слева записаны коэффициенты исходного уравнения при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим

$$u_{\xi\xi}\{25-50+25\} + u_{\xi\eta}\{50-50\} + u_{\eta\eta}\{25\} + u_\xi\{5\} + 2u = \xi + \eta.$$

Функцию, стоящую в правой части исходного уравнения, необходимо также выразить через $\xi$ и $\eta$. После деления на 25 (коэффициент при $u_{\eta\eta}$)

$$u_{\eta\eta} + 0,2u_\xi + 0,08u = 0,4(\xi + \eta).$$

**Ответ.** Исходное уравнение является уравнением параболического типа на всей плоскости $XOY$. Канонический вид

$$u_{\eta\eta} + 0,2u_\xi + 0,08u = 0,4(\xi + \eta),$$

где $\xi = 5y + x, \quad \eta = x.$

**Пример 2.3 (пример выполнения задачи 4).**

Определить тип уравнения

$$u_{xx} + 4u_{yy} + u_x - 3u_y + u = x^2$$

и привести его к каноническому виду.

1. Определим коэффициенты $A, B, C$:

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 4.$$

2. Вычислим выражение $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = 0 - 4 = -4.$$

3. Определим тип уравнения (в зависимости от знака выражения $B^2 - AC$):

$$B^2 - AC = -4 < 0,$$

т. е. уравнение является уравнением эллиптического типа.

4. Запишем уравнение характеристик

$$dy^2 + 4dx^2 = 0.$$

5. Решим уравнение характеристик. Для этого:

1) разрешим уравнение характеристик как квадратное уравнение относительно $dy$:

$$dy = \pm 2idx;$$

2) мы получили пару комплексно-сопряженных уравнений. Они имеют пару комплексно-сопряженных общих интегралов

(уравнения эллиптического типа не имеют вещественных характеристик):

$$y = \pm 2xi + C.$$

Это общее решение. Для того чтобы ввести характеристические переменные, запишем общие интегралы

$$y \mp 2xi = C.$$

6. Введем характеристические переменные как вещественную и мнимую части одного из общих интегралов уравнения характеристик:

$$\xi = Re(y + 2xi) = y,$$

$$\eta = Im(y + 2xi) = 2x.$$

7. Пересчитаем все производные, входящие в исходное уравнение, используя правило дифференцирования сложной функции. Для удобства найдем $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$:

$$\xi_x = 0, \qquad \xi_y = 1,$$

$$\eta_x = 2, \qquad \eta_y = 0.$$

Производные второго порядка от $\xi$ и $\eta$ равны нулю.

$$\begin{array}{r|l} 2 & u = u(\xi(y), \eta(x)), \\ 1 & u_x = 2u_\eta, \\ -3 & u_y = u_\xi, \\ 1 & u_{xx} = 4u_{\eta\eta}, \\ 4 & u_{yy} = u_{\xi\xi} \end{array}$$

Здесь слева записаны коэффициенты исходного уравнения при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим

$$u_{\xi\xi}\{4\} + u_{\eta\eta}\{4\} + u_{\xi}\{-3\} + u_{\eta}\{2\} + u = \xi.$$

Функцию, стоящую в правой части исходного уравнения, необходимо также выразить через $\xi$ и $\eta$. После деления на 4 (коэффициент при $u_{\xi\xi} u_{\eta\eta}$)

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 0,75u_{\xi} + 0,5u_{\eta} + 0,25u = 0,25\xi.$$

**Ответ.** Исходное уравнение является уравнением эллиптического типа на всей плоскости $XOY$. Канонический вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 0,75u_{\xi} + 0,5u_{\eta} + 0,25u = 0,25\xi.$$

где $\xi = y, \quad \eta = 2x.$

## 2.3. Приведение к каноническому виду уравнений смешанного типа

**Определение.** Уравнение с частными производными называется уравнением *смешанного типа* в области $D$, если оно меняет тип при переходе из одной подобласти области $D$ в другую.

Если необходимо привести такое уравнение к каноническому виду, то его приводят отдельно в каждой из подобластей, где оно сохраняет тип.

Рассмотрим примеры.

**Пример 2.4.** Привести к каноническому виду уравнение везде, где оно сохраняет тип

$$u_{xx} - yu_{yy} = 0. \tag{2.18}$$

1. Определим коэффициенты $A, B, C$:

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -y.$$

2. Вычислим выражение $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = 0 + y = y.$$

3. Определим тип уравнения (в зависимости от знака выражения $B^2 - AC$). Очевидно, возможны три случая:

а) $y > 0$. В этом случае исходное уравнение является уравнением гиперболического типа;

б) $y = 0$, что соответствует уравнению параболического типа;

в) $y < 0$. Рассматриваемое уравнение относится к эллиптическому типу.

4. Запишем уравнение характеристик

$$dy^2 - ydx^2 = 0.$$

5. Далее рассматриваем каждый случай отдельно:

а) $y > 0$. Решим уравнение характеристик. Для этого:

1) разрешим уравнение характеристик как квадратное уравнение относительно $dy$:

$$dy = \pm\sqrt{y}dx;$$

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{y}} = dx;$$

2) найдем общие интегралы полученных уравнений (характеристики исходного уравнения в области $y > 0$):

$$x \pm 2\sqrt{y} = C.$$

6. Введем характеристические переменные:

$$\xi = x + 2\sqrt{y}, \quad \eta = x - 2\sqrt{y}.$$

7. Пересчитаем все производные, входящие в исходное уравнение, используя правило дифференцирования сложной функции и правило дифференцирования произведения двух функций. Для удобства найдем $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y, \xi_{xx}, \xi_{xy}, \xi_{yy}, \eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yy}$:

$$\begin{aligned} \xi_x &= 1, & \xi_y &= \frac{1}{\sqrt{y}}, \\ \eta_x &= 1, & \eta_y &= -\frac{1}{\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{xx} &= 0, & \xi_{xy} &= 0, & \xi_{yy} &= -\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}, \\ \eta_{xx} &= 0, & \eta_{xy} &= 0, & \eta_{yy} &= \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{array}{r|l} 0 & u = u(\xi(x,y), \eta(x,y)), \\ 0 & u_x = u_\xi + u_\eta, \\ 0 & u_y = u_\xi \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} - u_\eta \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}, \\ 1 & u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\ -y & u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \frac{1}{y} - 2u_{\xi\eta} \cdot \frac{1}{y} + u_{\eta\eta} \cdot \frac{1}{y} - \frac{1}{2}u_\xi y^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}u_\eta y^{-\frac{3}{2}}. \end{array}$$

Здесь слева записаны коэффициенты исходного уравнения при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим

$$u_{\xi\xi}\left\{1 - y\cdot\frac{1}{y}\right\} + u_{\xi\eta}\left\{2 + 2y\cdot\frac{1}{y}\right\} + u_{\eta\eta}\left\{1 - y\cdot\frac{1}{y}\right\} +$$
$$+u_\xi\left\{\frac{1}{2}y^{1-3/2}\right\} + u_\eta\left\{-\frac{1}{2}y^{1-3/2}\right\} = 0.$$

Или

$$4u_{\xi\eta} + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}u_\xi - \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}u_\eta = 0.$$

Выразив $\sqrt{y}$ через $\xi$ и $\eta$

$$\sqrt{y} = \frac{\xi - \eta}{4},$$

получим

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi - \eta)}(u_\xi - u_\eta) = 0.$$

Рассмотрим случай

б) $y = 0$. Исходное уравнение примет вид

$$u_{xx} = 0.$$

Это канонический вид для уравнений параболического типа.

Перейдем к рассмотрению случая

в) $y < 0$. Решим уравнение характеристик. Для этого:

1) разрешим уравнение характеристик как квадратное уравнение относительно $dy$. В этом случае под знаком радикала стоит отрицательная величина. Сделаем следующие преобразования:

$$\sqrt{y} = \sqrt{-1\cdot(-y)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-y} = i\sqrt{-y}.$$

Получим два комплексно-сопряженных уравнения

$$dy = \pm i\sqrt{-y}dx;$$

$$\frac{dy}{\sqrt{-y}} = \pm i dx;$$

2) эта пара комплексно-сопряженных уравнений имеет пару комплексно-сопряженных интегралов:

$$-2\sqrt{-y} \pm ix = C$$

или

$$2\sqrt{-y} \mp ix = C_1.$$

6. За характеристические переменные в этом случае берем вещественную и мнимую части одного из интегралов

$$\xi = 2\sqrt{-y}, \quad \eta = x.$$

7. Пересчитаем все производные, входящие в исходное уравнение, используя правило дифференцирования сложной функции и правило дифференцирования произведения двух функций. Для удобства найдем

$$\xi_x = 0, \qquad \xi_y = -\frac{1}{\sqrt{-y}},$$

$$\eta_x = 1, \qquad \eta_y = 0,$$

$$\xi_{xx} = 0, \qquad \xi_{xy} = 0, \qquad \xi_{yy} = -\frac{1}{2}(-y)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\eta_{xx} = 0, \qquad \eta_{xy} = 0, \qquad \eta_{yy} = 0.$$

Тогда

$$
\begin{array}{r|l}
0 & u = u(\xi(x,y), \eta(x,y)), \\
0 & u_x = u_\eta, \\
0 & u_y = u_\xi \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-y}}\right), \\
1 & u_{xx} = u_{\eta\eta}, \\
-y & u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-y}}\right)^2 + u_\xi \left(-\frac{1}{2}(-y)^{-\frac{3}{2}}\right).
\end{array}
$$

Здесь слева записаны коэффициенты исходного уравнения при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим

$$u_{\xi\xi}\left\{\frac{-y}{-y}\right\} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{2}u_\xi(-y)^{1-3/2} = 0.$$

В этом случае

$$\sqrt{-y} = \frac{\xi}{2}.$$

Получим

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\xi}u_\xi = 0.$$

**Ответ:** а) при $y > 0$ исходное уравнение является уравнением гиперболического типа, канонический вид

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi - \eta)}(u_\xi - u_\eta) = 0,$$

где

$$\xi = x + 2\sqrt{y},\ \eta = x - 2\sqrt{y};$$

б) при $y = 0$ уравнение является уравнением параболического типа, канонический вид

$$u_{xx} = 0;$$

в) при $y < 0$ уравнение является уравнением эллиптического типа, канонический вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\xi} u_{\xi} = 0,$$

где

$$\xi = 2\sqrt{-y}, \ \eta = x.$$

**Пример 2.5.** Привести к каноническому виду уравнение везде, где оно сохраняет тип

$$xu_{xx} - yu_{yy} - 2yu_y + 2xu_x = 0. \tag{2.19}$$

1. Определим коэффициенты $A, B, C$:

$$A = x, \quad B = 0, \quad C = -y.$$

2. Вычислим выражение $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = 0 - (-xy) = xy.$$

3. Определим тип уравнения (в зависимости от знака выражения $B^2 - AC$). Очевидно, возможны три случая:

а) $xy > 0$. В этом случае исходное уравнение является уравнением гиперболического типа;

б) $xy = 0$, что соответствует уравнению параболического типа;

в) $xy < 0$. Рассматриваемое уравнение относится к эллиптическому типу.

4. Запишем уравнение характеристик

$$xdy^2 - ydx^2 = 0.$$

5. Далее рассматриваем каждый случай отдельно:

а) $xy > 0$, т.е. $x > 0, y > 0$ или $x < 0, y < 0$.

Сначала рассмотрим область $x > 0, y > 0$.

Решим уравнение характеристик. Для этого:

1) разрешим уравнение характеристик как квадратное уравнение относительно $dy$:

$$dy = \pm\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}dx;$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \pm\frac{dx}{\sqrt{x}};$$

2) найдем общие интегралы полученных уравнений (характеристики исходного уравнения в области $x > 0, y > 0$):

$$2\sqrt{y} \pm 2\sqrt{x} = C.$$

6. Введем характеристические переменные

$$\xi = 2\sqrt{y} + 2\sqrt{x}, \quad \eta = 2\sqrt{y} - 2\sqrt{x}.$$

7. Пересчитаем все производные, входящие в исходное уравнение, используя правило дифференцирования сложной функции и правило дифференцирования произведения двух функций. Для удобства найдем

$$\begin{array}{lll}
\xi_x = x^{-1/2}, & \xi_y = y^{-1/2}, & \\
\eta_x = -x^{-1/2}, & \eta_y = y^{-1/2}, & \\
\xi_{xx} = -\dfrac{1}{2}x^{-3/2}, & \xi_{xy} = 0, & \xi_{yy} = -\dfrac{1}{2}y^{-3/2}, \\
\eta_{xx} = \dfrac{1}{2}x^{-3/2}, & \eta_{xy} = 0, & \eta_{yy} = -\dfrac{1}{2}y^{-3/2}.
\end{array}$$

Тогда

$$
\begin{array}{r|l}
0 & u = u(\xi(x,y), \eta(x,y)), \\
2x & u_x = u_\xi x^{-1/2} - u_\eta x^{-1/2}, \\
-2y & u_y = u_\xi y^{-1/2} + u_\eta y^{-1/2}, \\
x & u_{xx} = u_{\xi\xi} x^{-1} - 2u_{\xi\eta} x^{-1} + u_{\eta\eta} x^{-1} + \\
 & \qquad + u_\xi \left(-\frac{1}{2} x^{-3/2}\right) + u_\eta \left(\frac{1}{2} x^{-3/2}\right), \\
-y & u_{yy} = u_{\xi\xi} y^{-1} + 2u_{\xi\eta} y^{-1} + u_{\eta\eta} y^{-1} + \\
 & \qquad + u_\xi \left(-\frac{1}{2} y^{-3/2}\right) + u_\eta \left(-\frac{1}{2} y^{-3/2}\right).
\end{array}
$$

Здесь слева записаны коэффициенты исходного уравнения при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим

$$
u_{\xi\xi}\left\{1 - y \cdot \frac{1}{y}\right\} + u_{\xi\eta}\left\{-2 - 2y \cdot \frac{1}{y}\right\} + u_{\eta\eta}\left\{1 - y \cdot \frac{1}{y}\right\} +
$$

$$
+ u_\xi \left\{2x^{1/2} - 2y^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2}\right\} +
$$

$$
+ u_\eta \left\{-2x^{1/2} - 2y^{1/2} + \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2}\right\} = 0.
$$

Или

$$
-4u_{\xi\eta} + u_\xi \left\{2x^{1/2} - 2y^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2}\right\} +
$$

$$
+ u_\eta \left\{-2x^{1/2} - 2y^{1/2} + \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2}\right\} = 0.
$$

Выразив $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ через $\xi$ и $\eta$

$$
\sqrt{x} = \frac{\xi - \eta}{4},
$$

$$
\sqrt{y} = \frac{\xi + \eta}{4},
$$

после деления на –4 получим уравнение в каноническом виде

$$u_{\xi\eta} - u_\xi \left( \frac{-\eta}{4} - \frac{1}{2(\xi - \eta)} + \frac{1}{2(\xi + \eta)} \right) -$$
$$-u_\eta \left( \frac{-\xi}{4} + \frac{1}{2(\xi - \eta)} + \frac{1}{2(\xi + \eta)} \right) = 0.$$

Рассмотрим вторую область, в которой исходное уравнение относится к гиперболическому типу: $x < 0, y < 0$.

Разрешим уравнение характеристик как квадратное уравнение относительно $dy$:

$$dy = \pm \sqrt{\frac{y}{x}} dx.$$

Так как $x < 0$ и $y < 0$, то выражение под знаком радикала преобразуем так:

$$\sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{-y}{-x}} = \frac{\sqrt{-y}}{\sqrt{-x}},$$

тогда

$$\frac{dy}{\sqrt{-y}} = \pm \frac{dx}{\sqrt{-x}}.$$

Найдем общие интегралы полученных уравнений (характеристики исходного уравнения в области $x < 0, y < 0$):

$$2\sqrt{-y} \pm 2\sqrt{-x} = C.$$

6. Введем характеристические переменные

$$\xi = 2\sqrt{-y} + 2\sqrt{-x}, \quad \eta = 2\sqrt{-y} - 2\sqrt{-x}.$$

7. Пересчитаем все производные, входящие в исходное уравнение, используя правило дифференцирования сложной функ-

ции и правило дифференцирования произведения двух функций. Для удобства найдем

$$\begin{aligned}
&\xi_x = -(-x)^{-1/2}, && \xi_y = -(-y)^{-1/2}, && \\
&\eta_x = (-x)^{-1/2}, && \eta_y = -(-y)^{-1/2}, && \\
&\xi_{xx} = -\frac{1}{2}(-x)^{-3/2}, && \xi_{xy} = 0, && \xi_{yy} = -\frac{1}{2}(-y)^{-3/2}, \\
&\eta_{xx} = \frac{1}{2}(-x)^{-3/2}, && \eta_{xy} = 0, && \eta_{yy} = -\frac{1}{2}(-y)^{-3/2}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{array}{r|l}
0 & u = u(\xi(x,y),\eta(x,y)), \\
2x & u_x = u_\xi(-(-x)^{-1/2}) + u_\eta(-x)^{-1/2}, \\
-2y & u_y = u_\xi(-(-y)^{-1/2}) + u_\eta(-(-y)^{-1/2}), \\
x & u_{xx} = u_{\xi\xi}(-x)^{-1} - 2u_{\xi\eta}(-x)^{-1} + u_{\eta\eta}(-x)^{-1} + \\
 & \qquad +u_\xi\left(-\frac{1}{2}(-x)^{-3/2}\right) + u_\eta\left(\frac{1}{2}(-x)^{-3/2}\right), \\
-y & u_{yy} = u_{\xi\xi}(-y)^{-1} + 2u_{\xi\eta}(-y)^{-1} + u_{\eta\eta}(-y)^{-1} + \\
 & \qquad +u_\xi\left(-\frac{1}{2}(-y)^{-3/2}\right) + u_\eta\left(-\frac{1}{2}(-y)^{-3/2}\right).
\end{array}$$

Здесь слева записаны коэффициенты исходного уравнения при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим

$$\begin{gathered}
u_{\xi\xi}\{-1+1\} + u_{\xi\eta}\{-2-2\} + u_{\eta\eta}\{-1+1\} + \\
+u_\xi\left\{2(-x)^{1/2} - 2(-y)^{1/2} + \frac{1}{2}(-x)^{-1/2} - \frac{1}{2}(-y)^{-1/2}\right\} + \\
+u_\eta\left\{-2(-x)^{1/2} - 2(-y)^{1/2} - \frac{1}{2}(-x)^{-1/2} - \frac{1}{2}(-y)^{-1/2}\right\} = 0.
\end{gathered}$$

Или

$$-4u_{\xi\eta} + u_\xi\left\{2(-x)^{1/2} - 2(-y)^{1/2} + \frac{1}{2}(-x)^{-1/2} - \frac{1}{2}(-y)^{-1/2}\right\} +$$

$$+u_\eta\left\{-2(-x)^{1/2}-2(-y)^{1/2}-\frac{1}{2}(-x)^{-1/2}-\frac{1}{2}(-y)^{-1/2}\right\}=0.$$

Выразив $\sqrt{-x}$ и $\sqrt{-y}$ через $\xi$ и $\eta$

$$\sqrt{-x}=\frac{\xi-\eta}{4},$$

$$\sqrt{-y}=\frac{\xi+\eta}{4},$$

получим

$$-4u_{\xi\eta}+u_\xi\left(\frac{\xi-\eta}{2}-\frac{\xi+\eta}{2}+\frac{2}{\xi-\eta}-\frac{2}{\xi+\eta}\right)+$$

$$+u_\eta\left(\frac{\eta-\xi}{2}-\frac{\xi+\eta}{2}-\frac{2}{\xi-\eta}-\frac{2}{\xi+\eta}\right)=0.$$

Приведя подобные слагаемые и разделив последнее уравнение на –4, получим канонический вид исходного уравнения при $x<0, y<0$:

$$u_{\xi\eta}-u_\xi\left(-\frac{\eta}{4}+\frac{1}{2(\xi-\eta)}-\frac{1}{2(\xi+\eta)}\right)-$$

$$-u_\eta\left(-\frac{\xi}{4}-\frac{1}{2(\xi-\eta)}-\frac{1}{2(\xi+\eta)}\right)=0.$$

Рассмотрим случай б):

б) $xy=0$. Заметим, что в точке $x=0, y=0$ уравнение вырождается. При $x=0, y\neq 0$ имеем уравнение параболического типа в каноническом виде

$$-yu_{yy}-2yu_y=0.$$

Или после деления на $-y$

$$u_{yy}+2u_y=0.$$

Аналогично при $x \neq 0, y = 0$ будем иметь

$$u_{xx} + 2u_x = 0.$$

Это канонический вид для уравнений параболического типа.

Перейдем к рассмотрению случая в):

в) $xy < 0$. Необходимо, как и в случае а), рассмотреть две области: $x > 0$, $y < 0$ и $x < 0$, $y > 0$. Рассмотрим первую из них, т. е. $x > 0$, $y < 0$.

Разрешим уравнение характеристик как квадратное уравнение относительно $dy$:

$$dy = \pm\sqrt{\frac{y}{x}}dx.$$

В этом случае под знаком радикала стоит отрицательная величина. Сделаем следующие преобразования

$$\sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{-(-y)}{x}} = \frac{i\sqrt{-y}}{\sqrt{x}}.$$

Получим два комплексно-сопряженных уравнения

$$dy = \pm\frac{i\sqrt{-y}}{\sqrt{x}}dx;$$

$$\frac{dy}{\sqrt{-y}} = \pm\frac{idx}{\sqrt{x}}.$$

Эта пара комплексно-сопряженных уравнений имеет пару комплексно-сопряженных интегралов

$$-2\sqrt{-y} \pm i2\sqrt{x} = C.$$

6. За характеристические переменные в этом случае берем вещественную и мнимую части одного из интегралов

$$\xi = 2\sqrt{-y}, \quad \eta = 2\sqrt{x}.$$

7. Пересчитаем все производные, входящие в исходное уравнение, используя правило дифференцирования сложной функции и правило дифференцирования произведения двух функций. Для удобства найдем

$$\begin{array}{lll} \xi_x = 0, & \xi_y = -(-y)^{-1/2}, & \\ \eta_x = x^{-1/2}, & \eta_y = 0, & \\ \xi_{xx} = 0, & \xi_{xy} = 0, & \xi_{yy} = -\dfrac{1}{2}(-y)^{-3/2}, \\ \eta_{xx} = -\dfrac{1}{2}x^{-3/2}, & \eta_{xy} = 0, & \eta_{yy} = 0. \end{array}$$

Тогда

$$\begin{array}{r|l} 0 & u = u(\xi(x,y), \eta(x,y)), \\ 2x & u_x = u_\eta x^{-1/2}, \\ -2y & u_y = u_\xi(-(-y)^{-1/2}), \\ x & u_{xx} = u_{\eta\eta}x^{-1} + u_\eta\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right), \\ -y & u_{yy} = u_{\xi\xi}(-y)^{-1} + u_\xi\left(-\frac{1}{2}(-y)^{-3/2}\right). \end{array}$$

Здесь слева записаны коэффициенты исходного уравнения при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\xi\left(-2(-y)^{1/2} - \frac{1}{2}(-y)^{-1/2}\right)+u_\eta\left(2x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2}\right) = 0.$$

В этом случае

$$\sqrt{-y} = \frac{\xi}{2},$$

$$\sqrt{x} = \frac{\eta}{2}.$$

Получим канонический вид исходного уравнения в области $x > 0, y < 0$:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - u_\xi\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) + u_\eta\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right) = 0.$$

Пусть теперь $x < 0$, $y > 0$.

В этой области уравнение характеристик после разделения переменных распадается на два комплексно-сопряженных уравнения вида

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \pm\frac{idx}{\sqrt{-x}}.$$

Эта пара комплексно-сопряженных уравнений имеет пару комплексно-сопряженных интегралов

$$2\sqrt{y} \pm i2\sqrt{-x} = C.$$

6. За характеристические переменные в этом случае берем вещественную и мнимую части одного из интегралов

$$\xi = 2\sqrt{y}, \quad \eta = 2\sqrt{-x}.$$

7. Пересчитаем все производные, входящие в исходное уравнение, используя правило дифференцирования сложной функции и правило дифференцирования произведения двух функций. Для удобства найдем

$$\xi_x = 0, \qquad \xi_y = y^{-1/2},$$

$$\eta_x = -(-x)^{-1/2}, \qquad \eta_y = 0,$$

$$\xi_{xx} = 0, \qquad \xi_{xy} = 0, \qquad \xi_{yy} = -\frac{1}{2}y^{-3/2},$$

$$\eta_{xx} = -\frac{1}{2}(-x)^{-3/2}, \qquad \eta_{xy} = 0, \qquad \eta_{yy} = 0.$$

Тогда

$$\begin{array}{r|l} 0 & u = u(\xi(x,y),\eta(x,y)), \\ 2x & u_x = u_\eta(-(-x)^{-1/2}), \\ -2y & u_y = u_\xi y^{-1/2}), \\ x & u_{xx} = u_{\eta\eta}(-x)^{-1} + u_\eta\left(-\frac{1}{2}(-x)^{-3/2}\right), \\ -y & u_{yy} = u_{\xi\xi}y^{-1} + u_\xi\left(-\frac{1}{2}y^{-3/2}\right). \end{array}$$

Здесь слева записаны коэффициенты исходного уравнения при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим

$$-u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_\xi\left(-2y^{1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2}\right) +$$
$$+u_\eta\left(2(-x)^{1/2} + \frac{1}{2}(-x)^{-1/2}\right) = 0.$$

В этом случае

$$\sqrt{y} = \frac{\xi}{2},$$
$$\sqrt{-x} = \frac{\eta}{2}.$$

Получим канонический вид исходного уравнения в области $x < 0, y > 0$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_\xi\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) - u_\eta\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right) = 0.$$

**Ответ:**

а) при $x > 0, y > 0$ и $x < 0, y < 0$ исходное уравнение является уравнением гиперболического типа и имеет канонический вид в каждой из областей соответственно

$$u_{\xi\eta} - u_\xi\left(\frac{-\eta}{4} - \frac{1}{2(\xi-\eta)} + \frac{1}{2(\xi+\eta)}\right) -$$

$$-u_\eta\left(\frac{-\xi}{4}+\frac{1}{2(\xi-\eta)}+\frac{1}{2(\xi+\eta)}\right)=0,$$

где

$$\xi=2\sqrt{y}+2\sqrt{x},\ \eta=2\sqrt{y}-2\sqrt{x};$$

$$u_{\xi\eta}-u_\xi\left(-\frac{\eta}{4}+\frac{1}{2(\xi-\eta)}-\frac{1}{2(\xi+\eta)}\right)-$$

$$-u_\eta\left(-\frac{\xi}{4}-\frac{1}{2(\xi-\eta)}-\frac{1}{2(\xi+\eta)}\right)=0,$$

где

$$\xi=2\sqrt{-y}+2\sqrt{-x},\ \eta=2\sqrt{-y}-2\sqrt{-x};$$

б) в точке $x=0, y=0$ уравнение вырождается.

При $x=0, y\neq 0$ и при $x\neq 0, y=0$ уравнение является уравнением параболического типа и имеет канонический вид в каждой из областей соответственно

$$u_{yy}+2u_y=0,$$

$$u_{xx}+2u_x=0;$$

в) при $y<0, x>0$ и при $y>0, x<0$ уравнение является уравнением эллиптического типа и имеет в этих областях канонический вид соответственно

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-u_\xi\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)+u_\eta\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)=0,$$

где

$$\xi=2\sqrt{-y},\ \eta=2\sqrt{x};$$

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\xi\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)-u_\eta\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right)=0,$$

где

$$\xi=2\sqrt{y},\ \eta=2\sqrt{-x}.$$

## 2.4. Приведение к каноническому виду линейных дифференциальных уравнений второго порядка с тремя и более независимыми переменными

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \tag{2.20}$$

где $a_{ij}, b_i, c$ — заданные константы, $f(x_1, \ldots x_n)$ — заданная функция, $u(x_1, \ldots x_n)$ — искомая функция.

Для этого уравнения составим характеристическую форму

$$Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j. \tag{2.21}$$

Знаем, что в каждой фиксированной точке существует неособое аффинное преобразование

$$\lambda_i = \lambda_i(\mu_1, \ldots, \mu_n), \tag{2.22}$$

которое приводит форму (2.21) к нормальному каноническому виду

$$Q(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i^2, \tag{2.23}$$

где $\alpha_i \in \{-1; 0; 1\}, i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим частный случай преобразования (2.22) — линейное преобразование

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\mu_k,\ i = 1, \ldots, n. \tag{2.24}$$

Используя матрицу этого преобразования (точнее, транспонированную к ней), запишем преобразование переменных для уравнения (2.20):

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i, \; k = 1, \ldots, n. \tag{2.25}$$

Тогда уравнение (2.20) примет канонический вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \tilde{c}u = \tilde{f}. \tag{2.26}$$

При этом коэффициенты уравнения (2.26) удовлетворяют условиям

$$\tilde{a}_{ij} = 0, \quad i \neq j; \quad \tilde{a}_{ii} = \alpha_i.$$

Итак, для того чтобы привести уравнение (2.20) к каноническому виду, необходимо:

1. Составить характеристическую форму.

2. Привести ее к каноническому виду.

3. Записать преобразование переменных

$$\lambda_i = \lambda_i(\mu_1, \ldots, \mu_n),$$

с помощью которого характеристическая форма была приведена к каноническому виду.

4. Записать матрицу $A$ этого преобразования и матрицу $A^t$, транспонированную к ней.

5. Ввести новые характеристические переменные.

Для этого необходимо записать преобразование независимых переменных с матрицей $A^t$

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i, \ k = 1, \ldots, n.$$

6. Пересчитать все производные, входящие в уравнение в новых переменных.

7. Подставить найденные производные в исходное уравнение, привести подобные слагаемые и записать канонический вид.

**Пример 2.6 (пример выполнения задачи 6).**

Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} = 0.$$

Составим характеристическую форму и приведем ее к каноническом виду:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2^2 + 4\lambda_2\lambda_3 + 5\lambda_3^2 =$$
$$= (\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2) + (\lambda_2^2 + 4\lambda_2\lambda_3 + 4\lambda_3^2) + \lambda_3^2 =$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (\lambda_2 + 2\lambda_3)^2 + \lambda_3^2.$$

Обозначим

$$\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2,$$
$$\mu_2 = \lambda_2 + 2\lambda_3,$$
$$\mu_3 = \lambda_3.$$

Тогда получим форму $Q$ в каноническом виде

$$Q(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2.$$

Следовательно, исходное уравнение является уравнением эллиптического типа.

Чтобы записать матрицу $A$, необходимо выразить переменные $\lambda_i$ через $\mu_i$:

$$\lambda_1 = \mu_1 - \mu_2 + 2\mu_3,$$
$$\lambda_2 = \mu_2 - 2\mu_3,$$
$$\lambda_3 = \mu_3.$$

Запишем матрицу $A$ и найдем $A^t$:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$A^t = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Вводим характеристические переменные по формулам

$$\xi = x,$$
$$\eta = -x + y,$$
$$\zeta = 2x - 2y + z.$$

Пересчитаем все производные, входящие в исходное уравнение, по правилу дифференцирования сложной функции:

$$
\begin{array}{r|l}
0 & u = u(\xi(x), \eta(x, y), \zeta(z, y.z), \\
0 & u_x = u_\xi - u_\eta + 2u_\zeta, \\
0 & u_y = u_\eta - 2u_\zeta, \\
0 & u_z = u_\zeta, \\
1 & u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 4u_{\zeta\zeta} - 2u_{\xi\eta} + 4u_{\xi\zeta} - 4u_{\eta\zeta}, \\
2 & u_{xy} = u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta} + 4u_{\zeta\eta} - 2u_{\xi\zeta} - 4u_{\zeta\zeta}, \\
2 & u_{yy} = u_{\eta\eta} - 4u_{\eta\zeta} + 4u_{\zeta\zeta}, \\
4 & u_{yz} = u_{\eta\zeta} - 2u_{\zeta\zeta}, \\
5 & u_{zz} = u_{\zeta\zeta}.
\end{array}
$$

Подставляя в уравнение и собирая подобные слагаемые, получим

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}(1 - 2 + 2) + u_{\zeta\zeta}(4 - 8 + 8 - 8 + 5) +$$

$$+ u_{\xi\eta}(-2 + 2) + u_{\xi\zeta}(4 - 4) + u_{\eta\zeta}(-4 + 8 - 8 + 4) = 0.$$

Или

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0.$$

**Ответ.** Уравнение эллиптического типа. Канонический вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0,$$

где

$$\xi = x, \ \eta = -x + y, \ \zeta = 2x - 2y + z.$$

**Пример 2.7 (пример выполнения задачи 6).**

Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} + u_y - u_x = 0.$$

Составим характеристическую форму и приведем ее к каноническом виду:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3.$$

В этой форме нет ни одного квадрата переменной. Поэтому сначала сделаем преобразование, которое приведет к появлению квадратов

$$\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2,$$

$$\lambda_2 = \mu_1 - \mu_2,$$

$$\lambda_3 = \mu_3.$$

Запишем сразу матрицу этого преобразования

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$Q(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mu_1^2 - \mu_2^2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3 - \mu_2\mu_3 =$$

$$= \mu_1^2 - \mu_2^2 + 2\mu_1\mu_3 = (\mu_1^2 + 2\mu_1\mu_3 + \mu_3^2) - \mu_3^2 - \mu_2^2 =$$

$$= (\mu_1 + \mu_3)^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2.$$

Делаем еще одно преобразование переменных

$$\nu_1 = \mu_1 + \mu_3,$$

$$\nu_2 = \mu_2,$$

$$\nu_3 = \mu_3.$$

Тогда получим форму $Q$ в каноническом виде

$$Q(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_3^2.$$

Следовательно, исходное уравнение является уравнением гиперболического типа.

Чтобы записать матрицу $A$ (матрицу перехода от переменных $\lambda$ к переменным $\nu$), необходимо сначала выразить переменные $\mu$ через $\nu$ и записать матрицу $A_2$ этого преобразования. Тогда

$$A = A_1 \times A_2.$$

Выражаем $\mu$ через $\nu$:

$$\mu_1 = \nu_1 - \nu_3,$$
$$\mu_2 = \nu_2,$$
$$\mu_3 = \nu_3.$$

Матрица этого преобразования

$$A_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Теперь можем найти матрицу $A$:

$$A = A_1 \times A_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Найдем $A^t$:

$$A^t = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Вводим характеристические переменные по формулам

$$\begin{aligned} \xi &= x + y, \\ \eta &= x - y, \\ \zeta &= -x - y + z. \end{aligned}$$

Пересчитаем все производные, входящие в исходное уравнение, используя правило дифференцирования сложной функции. Заметим, что в этих примерах нет необходимости считать производные от $\xi, \eta, \zeta$ по $x, y, z$, так как эти производные и составляют матрицу $A^t$:

$$\begin{array}{r|l} 0 & u = u(\xi(x,y), \eta(x,y), \zeta(x,y,z)), \\ -1 & u_x = u_\xi + u_\eta - u_\zeta, \\ 1 & u_y = u_\xi - u_\eta - u_\zeta, \\ 0 & u_z = u_\zeta, \\ 1 & u_{xy} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\zeta} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta}, \\ 1 & u_{xz} = u_{\xi\zeta} + u_{\eta\zeta} - u_{\zeta\zeta}, \\ 1 & u_{yz} = u_{\xi\zeta} - u_{\eta\zeta} - u_{\zeta\zeta}. \end{array}$$

Подставляя в уравнение и собирая подобные слагаемые, получим

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} + u_{\xi\zeta}(-2 + 1 + 1) + u_{\eta\zeta}(1 - 1) +$$

$$+u_\xi(-1+1) + u_\eta(-1-1) + u_\zeta(1-1) = 0$$

или

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} - 2u_\eta = 0.$$

**Ответ.** Уравнение гиперболического типа. Канонический вид

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} = 0,$$

где

$$\xi = x + y,\ \eta = x - y,\ \zeta = -x - y + z.$$

**Пример 2.8.** Привести к каноническому виду уравнение

$$3u_{yy} - 2u_{xy} - 2u_{yz} + 4u = 0.$$

Составим характеристическую форму

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 3\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2\lambda_3.$$

В этой квадратичной форме есть только один квадрат переменной — $(3\lambda_2^2)$, но коэффициент 3 для дальнейших преобразований не удобен. Поэтому его можно вынести как общий множитель. Тогда получим

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 3(\lambda_2^2 - \frac{2}{3}\lambda_1\lambda_2 - \frac{2}{3}\lambda_2\lambda_3).$$

Или можно исходное уравнение умножить на 3:

$$9u_{yy} - 6u_{xy} - 6u_{yz} + 12u = 0.$$

Тогда характеристическая форма будет иметь вид

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 9\lambda_2^2 - 6\lambda_1\lambda_2 - 6\lambda_2\lambda_3.$$

Этот вариант представляется более удобным в данном примере. Приведем форму $Q$ к каноническом виду:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (9\lambda_2^2 - 6\lambda_1\lambda_2 - 6\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_3) -$$

$$-\lambda_1^2 - \lambda_3^2 - 2\lambda_1\lambda_3 = (3\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3)^2 - (\lambda_1 + \lambda_3)^2.$$

Введем новые переменные

$$\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_3,$$
$$\mu_2 = 3\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3,$$
$$\mu_3 = \lambda_3.$$

Тогда получим форму $Q$ в каноническом виде

$$Q(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = -\mu_1^2 + \mu_2^2.$$

Следовательно, исходное уравнение является уравнением параболического типа.

Чтобы записать матрицу $A$, необходимо выразить переменные $\lambda_i$ через $\mu_i$:

$$\lambda_1 = \mu_1 - \mu_3,$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{3}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2,$$
$$\lambda_3 = \mu_3.$$

Запишем матрицу $A$ и найдем $A^t$:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$A^t = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Вводим характеристические переменные по формулам

$$\xi = x + \frac{1}{3}y,$$
$$\eta = \frac{1}{3}y,$$
$$\zeta = -x + z.$$

Пересчитаем все производные, входящие в исходное уравнение, используя правило дифференцирования сложной функции:

$$\begin{array}{r|l}
12 & u = u(\xi(x,y), \eta(y), \zeta(x,z)), \\
0 & u_x = u_\xi - u_\zeta, \\
0 & u_y = \frac{1}{3}u_\xi + \frac{1}{3}u_\eta, \\
0 & u_z = u_\zeta, \\
-6 & u_{xy} = \frac{1}{3}u_{\xi\xi} + \frac{1}{3}u_{\xi\eta} - \frac{1}{3}u_{\xi\zeta} - \frac{1}{3}u_{\zeta\eta}, \\
-6 & u_{yz} = \frac{1}{3}u_{\xi\zeta} + \frac{1}{3}u_{\eta\zeta}, \\
9 & u_{yy} = \frac{1}{9}u_{\xi\xi} + \frac{2}{9}u_{\xi\eta} + \frac{1}{9}u_{\eta\eta}.
\end{array}$$

Подставляя в уравнение и собирая подобные слагаемые, получим

$$u_{\xi\xi}(1-2) + u_{\eta\eta} + u_{\xi\eta}(2-2) + u_{\xi\zeta}(2-2) +$$
$$+ u_{\eta\zeta}(2-2) + 12u = 0$$

или

$$-u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 12u = 0.$$

**Ответ.** Уравнение параболического типа. Канонический вид

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - 12u = 0,$$

где

$$\xi = x + \frac{1}{3}y,\ \eta = \frac{1}{3}y,\ \zeta = -x + z.$$

## 2.5. Канонические формы линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

В случае двух независимых переменных линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + gu_y = f(x, y), \tag{2.27}$$

где $a, b, c, d, e, g$ — вещественные постоянные. Этому уравнению соответствует уравнение характеристик с постоянными коэффициентами

$$ady^2 - 2bdxdy + cdx^2 = 0.$$

А характеристиками являются прямые линии

$$ay - (b \pm \sqrt{b^2 - ac})x = C.$$

С помощью введения характеристических переменных уравнение (2.27) приводится к одной из простейших форм

1) в случае уравнения эллиптического типа

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + d_1u_\xi + e_1u_\eta + g_1u = f_1(\xi, \eta); \tag{2.28}$$

2) в случае уравнения гиперболического типа

$$u_{\xi\eta} + d_2 u_\xi + e_2 u_\eta + g_2 u = f_2(\xi, \eta)$$

или

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + d_3 u_\xi + e_3 u_\eta + g_3 u = f_3(\xi, \eta);$$

3) в случае уравнения параболического типа

$$u_{\eta\eta} + d_4 u_\xi + e_4 u_\eta + g_4 u = f_4(\xi, \eta).$$

Если коэффициенты исходного уравнения постоянны, то с помощью введения новой неизвестной функции из трех слагаемых группы младших производных можно оставить только одно.

Процесс упрощения группы младших производных покажем на примере уравнения (2.28) эллиптического типа. В уравнении сделаем замену неизвестной функции

$$u(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta} v(\xi, \eta),$$

где $v(\xi, \eta)$ — новая неизвестная функция, а $\lambda$ и $\mu$ — числа, подлежащие определению.

Пересчитаем производные, входящие в уравнение (2.28), по правилу дифференцирования произведения функций:

$$\begin{aligned}
&u = e^{\lambda\xi+\mu\eta}v,\\
&u_\xi = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\xi + \lambda v),\\
&u_\eta = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\eta + \mu v),\\
&u_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\xi} + 2\lambda v_\xi + \lambda^2 v),\\
&u_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + \mu v_\xi + \lambda\mu v),\\
&u_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v).
\end{aligned}$$

Заметим, что эти формулы неизменны для уравнения любого типа.

Как и ранее, можно слева расставить коэффициенты, на которые соответствующие производные умножаются в уравнении:

$$\begin{array}{r|l}
g_1 & u = e^{\lambda\xi+\mu\eta}v,\\
d_1 & u_\xi = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\xi + \lambda v),\\
e_1 & u_\eta = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\eta + \mu v),\\
1 & u_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\xi} + 2\lambda v_\xi + \lambda^2 v),\\
1 & u_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v).
\end{array}$$

Собирая подобные слагаемые и разделив на $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, получим

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (2\lambda + d_1)v_\xi + (2\mu + e_1)v_\eta + (\lambda d_1 + \mu e_1 + \lambda^2 + \mu^2)v =$$

$$= e^{-\lambda\xi-\mu\eta}f_1(\xi,\eta).$$

$\lambda$ и $\mu$ подбираем так, чтобы два слагаемых из трех в группе младших производных обратились в ноль. Пусть

$$2\lambda + d_1 = 0,$$

$$2\mu + e_1 = 0.$$

Откуда находим

$$\lambda = -\frac{d_1}{2}, \quad \mu = -\frac{e_1}{2}.$$

Подставляя найденные значения $\lambda$ и $\mu$ в уравнение, получим

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \tilde{g}_1 v = \tilde{f}_1,$$

где $\tilde{f}_1 = e^{-\lambda\xi-\mu\eta} f_1(\xi, \eta)$.

**Замечание.** В случае уравнения второго порядка с $n$ независимыми переменными упрощение группы младших производных осуществляется с помощью замены

$$u(\xi_1, \ldots, \xi_n) = v(\xi_1, \ldots, \xi_n) \exp(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i).$$

**Пример 2.9 (пример выполнения задачи 5).**

Привести к каноническому виду и проделать дальнейшие упрощения уравнения

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0. \qquad (2.29)$$

Приведем уравнение к каноническому виду.

1. Определим коэффициенты $a, b, c$:

$$a = 1, b = -2, c = 5.$$

2. Посчитаем выражение $b^2 - ac$:

$$b^2 - ac = (-2)^2 - 5 = -1.$$

3. Определим тип уравнения:

$$b^2 - ac = -1 < 0,$$

следовательно, это уравнение эллиптического типа во всей плоскости $XOY$.

4. Составим уравнение характеристик

$$dy^2 + 4dxdy + 5dx^2 = 0.$$

5. Решим уравнение характеристик. Получаем два комплексно-сопряженных уравнения

$$dy = (-2 \pm \sqrt{-1})dx,$$

$$dy = (-2 \pm i)dx.$$

Эти уравнения имеют пару комплексно-сопряженных интегралов

$$y = (-2 \pm i)x + C$$

или

$$y + (2 \mp i)x = C.$$

6. Введем характеристические переменные

$$\xi = Re(y + (2 + i)x) = y + 2x,$$

$$\eta = Im(y + (2 + i)x) = x.$$

7. Пересчитаем производные, входящие в уравнение. Для удобства найдем сначала

$$\xi_x = 2, \ \ \xi_y = 1,$$

$$\eta_x = 1, \ \ \eta_y = 0.$$

Все производные второго порядка равны нулю.

$$\begin{array}{r|l}
1 & u = u(\xi(x,y), \eta(x,y)), \\
-3 & u_x = 2u_\xi + u_\eta, \\
1 & u_y = u_\xi, \\
1 & u_{xx} = 4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\
-4 & u_{xy} = 2u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}, \\
5 & u_{yy} = u_{\xi\xi}.
\end{array}$$

8. Расставим слева коэффициенты, на которые соответствующие производные умножаются в уравнении. Это позволит быстро привести подобные слагаемые:

$$u_{\xi\xi}\underbrace{(4-8+5)}_{1}+u_{\xi\eta}\underbrace{(4-4)}_{0}+u_{\eta\eta}+u_\xi\underbrace{(-6+1)}_{-5}-3u_\eta+u=0.$$

Или

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 5u_\xi - 3u_\eta + u = 0. \tag{2.30}$$

Уравнение (2.30) — это канонический вид уравнения (2.29). Проведем дальнейшие упрощения. Для этого введем новую неизвестную функцию и пересчитаем все производные, входящие в уравнение (2.30):

$$\begin{array}{r|l}
1 & u = e^{\lambda\xi+\mu\eta}v, \\
-5 & u_\xi = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\xi + \lambda v), \\
-3 & u_\eta = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\eta + \mu v), \\
1 & u_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\xi} + 2\lambda v_\xi + \lambda^2 v), \\
1 & u_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v).
\end{array}$$

Слева, как и ранее, расставлены коэффициенты, на которые соответствующие производные умножаются в уравнении (2.30). Собирая подобные слагаемые и разделив на $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, получим

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+(2\lambda-5)v_{\xi}+(2\mu-3)v_{\eta}+(1-5\lambda-3\mu+\lambda^2+\mu^2)v=0.$$

Подберем $\lambda$ и $\mu$ так, чтобы коэффициенты при $u_\xi$ и $u_\eta$ обратились в ноль:

$$2\lambda-5=0,$$

$$2\mu-3=0.$$

Откуда находим

$$\lambda=\frac{5}{2},\quad \mu=\frac{3}{2}.$$

Подставляя найденные значения $\lambda$ и $\mu$ в уравнение, получим

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+\left(1-5\left(\frac{5}{2}\right)-3\left(\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)v=0.$$

Или

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}-\frac{15}{2}v=0.$$

**Ответ.** Уравнение эллиптического типа. Канонический вид

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}-\frac{15}{2}v=0,$$

где $\xi=y+2x,\ \eta=x,\ u=e^{\frac{5\xi+3\eta}{2}}v.$

## 2.6. Индивидуальные задания к главе 2

### Задача 2

Привести уравнения к каноническому виду:

2.1. $u_{xx} + 8u_{xy} + 7u_{yy} + 5u_x + u_y - u = 0.$

2.2. $11u_{xx} - 20u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 7u_y = 0.$

2.3. $u_{xx} - 2u_{xy} - 8u_{yy} + 2u_x - u_y = 0.$

2.4. $3u_{xx} - 4u_{xy} - 4u_{yy} + 3u_x - 5u_y + u = 0.$

2.5. $u_{xx} + 6u_{xy} - 7u_{yy} + 8u_x = 0.$

2.6. $-24u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x + 4u_y - u = 0.$

2.7. $6u_{xx} - 16u_{xy} - 6u_{yy} - u_x + 8u = 0.$

2.8. $u_{xx} - 2u_{xy} - 35u_{yy} + 9u_x - u_y + 2u = 0.$

2.9. $u_{xx} + 12u_{xy} + 27u_{yy} + 2u_x + 15u_y - u = 0.$

2.10. $5u_{xx} + 2u_{xy} - 7u_{yy} - 4u_x - u_y = 0.$

2.11. $u_{xx} + 6u_{xy} - 16u_{yy} + 5u_x + u_y + 9u = 0.$

2.12. $u_{xx} + 6u_{xy} - 27u_{yy} - 12u_x - 4u_y = 0.$

2.13. $3u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 12u_x + u_y = 0.$

2.14. $9u_{xx} - 2u_{xy} - 7u_{yy} + 7u_x - 3u_y = 0.$

2.15. $10u_{xx} + 14u_{xy} + 4u_{yy} + 5u_x - 2u_y = 0.$

2.16. $11u_{xx} + 6u_{xy} - 5u_{yy} - u_x - 7u_y + u = 0.$

2.17. $u_{xx} - 12u_{xy} + 11u_{yy} + 9u_x - 12u_y = 0.$

2.18. $u_{xx} + 2u_{xy} + 17u_x + 6u_y - 8u = 0.$

2.19. $8u_{xy} + 16u_{yy} + 25u_x + 2u_y - 8u = 0.$

2.20. $u_{xx} + 6u_{xy} + 35u_x + 8u_y - u = 0.$

2.21. $u_{xx} - 18u_{xy} + 17u_{yy} - 23u_x + u_y - 2u = 0.$

2.22. $8u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yy} + 15u_x + u_y - 2u = 0.$

2.23. $44u_{xx} + 24u_{xy} + u_{yy} - u_x + 4u_y - u = 0.$

2.24. $u_{xx} - 30u_{xy} + 104u_{yy} + 6u_x - u_y + u = 0.$

2.25. $16u_{xx} - u_{yy} - 21u_x - u_y + 7u = 0.$

## Задача 3

Привести уравнения к каноническому виду:

3.1. $u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} - 2u = 0.$

3.2. $81u_{xx} + 18u_{xy} + u_{yy} + 3u_x = 0.$

3.3. $u_{xx} + 22u_{xy} + 121u_{yy} + 2u_x = 0.$

3.4. $49u_{xx} + 14u_{xy} + u_{yy} - u = 0.$

3.5. $u_{xx} + 26u_{xy} + 169u_{yy} + u_y - u = 0.$

3.6. $4u_{xx} + 28u_{xy} + 49u_{yy} + u_x = 0.$

3.7. $u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} - 3u = 0.$

3.8. $4u_{xx} + 12u_{xy} + 9u_{yy} + 3u_x - u = 0.$

3.9. $8u_{xx} + 24u_{xy} + 18u_{yy} + 2u_x - u_y = 0.$

3.10. $3u_{xx} + 54u_{xy} + 243u_{yy} + 4u_x - u = 0.$

3.11. $u_{xx} + 18u_{xy} + 81u_{yy} + u = 0.$

3.12. $4u_{xx} + 12u_{xy} + 9u_{yy} - 4u_y + 2u_x = 0.$

3.13. $u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} + 5u_x - 2u_y = 0.$

3.14. $4u_{xx} + 20u_{xy} + 25u_{yy} - u_y + u = 0.$

3.15. $9u_{xx} + 30u_{xy} + 25u_{yy} - u_x + 6u_y = 0.$

3.16. $u_{xx} + 22u_{xy} + 121u_{yy} - 5u_x - 7u = 0.$

3.17. $4u_{xx} + 32u_{xy} + 64u_{yy} + 3u_x - 2u_y = 0.$

3.18. $9u_{xx} + 18u_{xy} + 9u_{yy} + u_y - 6u = 0.$

3.19. $5u_{xx} + 10u_{xy} + 5u_{yy} + 7u_y - 3u = 0.$

3.20. $u_{xx} + 28u_{xy} + 196u_{yy} + 7u_y - u = 0.$

3.21. $9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - u = 0.$

3.22. $4u_{xx} + 24u_{xy} + 36u_{yy} + 35u_x - u_y = 0.$

3.23. $u_{xx} + 34u_{xy} + 289u_{yy} - u_y + 3u = 0.$

3.24. $4u_{xx} + 60u_{xy} + 225u_{yy} + u_y - 7u = 0.$

3.25. $u_{xx} + 42u_{xy} + 441u_{yy} + 5u_x - 2u_y = 0.$

## Задача 4

Привести уравнения к каноническому виду:

4.1. $u_{xx} + 12u_{xy} + 100u_{yy} + 2u_x + 5u_y = 0.$

4.2. $36u_{xx} - 14u_{xy} + 149u_{yy} + u_x - 4u_y = 0.$

4.3. $u_{xx} - 2u_{xy} + 50u_{yy} + 2u_x - u_y = 0.$

4.4. $u_{xx} - 10u_{xy} + 125u_{yy} + u_x - 3u_y = 0.$

4.5. $u_{xx} + 6u_{xy} + 90u_{yy} + 12u_x + u_y = 0.$

4.6. $u_{xx} + 8u_{xy} + 65u_{yy} + 3u_x + u_y = 0.$

4.7. $u_{xx} - 6u_{xy} + 45u_{yy} - 4u_x + 5u_y = 0.$

4.8. $25u_{xx} - 10u_{xy} + 5u_{yy} + 8u_x + 3u_y = 0.$

4.9. $u_{xx} + 8u_{xy} + 116u_{yy} + 3u_x + 2 = 0.$

4.10. $u_{xx} + 2u_{xy} + 82u_{yy} - 5u_x - u_y = 0.$

4.11. $u_{xx} + 12u_{xy} + 117u_{yy} + 3u_x + u_y = 0.$

4.12. $5u_{xx} + 14u_{xy} + 17u_{yy} - 2u_x - 7u_y = 0.$

4.13. $u_{xx} + 16u_{xy} + 89u_{yy} + u_x + 14u_y = 0.$

4.14. $u_{xx} - 8u_{xy} + 137u_{yy} + 7u_x - u_y = 0.$

4.15. $u_{xx} + 6u_{xy} + 130u_{yy} - 3u_x - 12u_y = 0.$

4.16. $4u_{xx} + 16u_{xy} + 41u_{yy} - u_x - 4u_y = 0.$

4.17. $u_{xx} - 10u_{xy} + 250u_{yy} + 3u_x - 9u_y = 0.$

4.18. $u_{xx} + 4u_{xy} + 125u_{yy} + 5u_x + u_y = 0.$

4.19. $u_{xx} + 20u_{xy} + 164u_{yy} + u_x + u_y = 0.$

4.20. $u_{xx} + 14u_{xy} + 85u_{yy} + 2u_x + 7u_y = 0.$

4.21. $5u_{xx} - 12u_{xy} + 17u_{yy} - 2u_x + 3u_y = 0.$

4.22 $u_{xx} + 24u_{xy} + 265u_{yy} + u_x + 7u_y = 0.$

4.23. $u_{xx} + 8u_{xy} + 65u_{yy} - 8u_x + u_y = 0.$

4.24. $u_{xx} - 26u_{xy} + 194u_{yy} + 2u_x - 15u_y = 0.$

4.25. $u_{xx} + 4u_{xy} + 40u_{yy} - 16u_x - u_y = 0.$

### Задача 5

Привести к каноническому виду и проделать дальнейшие упрощения уравнений:

5.1. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - 3u_x + 2u_y + 4u = 0.$

5.2. $2u_{xx} - 4u_{xy} + 40u_{yy} - u_x + 4u_y + u = x.$

5.3. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 2u_y + 4u = 0.$

5.4. $5u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 4u_x + u_y + 3u = 0.$

5.5. $3u_{xx} - 16u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + 2u_y + 4u = 0.$

5.5. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + 3u_x + u_y + 8u = x.$

5.6. $5u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} - 24u_x + 32u_y + 64u = 0.$

5.7. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - 3u_x + 2u_y + 4u = 0.$

5.8. $u_{xx} - u_{yy} - 7u_x + u_y + 3u = 0.$

5.9. $5u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} - 12u_x + u_y + 4u = 0.$

5.10. $5u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + 12u_y - u = 2y.$

5.11. $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 13u_x + u_y + u = 0.$

5.12. $4u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 8u_x + 2u_y - 4u = 0.$

5.13. $u_{xx} - 12u_{xy} + 9u_{yy} + u_x - 2u_y + 7u = 0.$

5.14. $3u_{xx} - 10u_{xy} - 3u_{yy} - 4u_x + u_y + 3u = 0.$

5.15. $u_{xx} - 14u_{xy} + 74u_{yy} + 3u_x - u_y + 6u = 0.$

5.16. $u_{xx} - u_{yy} - 3u_x + 2u_y + 4u = 0.$

5.17. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 4u = 0.$

5.18. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} - 2u_x - 2u_y + u = 0.$

5.19. $2u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - 7u_x + u_y + 3u = 0.$

5.20. $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y + 4u = 0.$

5.21. $u_{xx} - 18u_{xy} + 17u_{yy} + u_x - 2u_y - 8u = 0.$

5.22. $4u_{xx} - 12u_{xy} + 9u_{yy} + 5u_x + u_y + 4u = 0.$

5.23. $u_{xx} + 2u_{xy} + 26u_{yy} + 12u_x + u_y - 8u = 0.$

5.24. $u_{xx} + 8u_{xy} + 20u_{yy} + u_x + 7u_y - u = 0.$

5.25. $u_{xx} - 4u_{xy} + 40u_{yy} - u_x + u_y + 2u = 0.$

## Задача 6

Привести уравнения к каноническому виду:

6.1. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} + 3u_x = 0.$

6.2. $u_{xx} + 3u_{yy} + 3u_{zz} - 2u_{xy} - 2u_{xz} - 2u_{yz} + 2u_x - u = 0.$

6.3. $4u_{xx} + u_{yy} + 2u_{zz} - u_{xz} - u_{yz} + 2u_x = 0.$

6.4. $9u_{xx} + 4u_{yy} + u_{zz} - 2u_{yz} - u = 0.$

6.5. $u_{xx} + 4u_{yy} + 2u_{xy} - 2u_{yz} + u = 0.$

6.6. $u_{yy} + u_{zz} - 4u_{xz} + u_{yz} + 2u_x - u = 0.$

6.7. $9u_{xx} + -6u_{xz} - 2u_{yz} + 2u_x - u = 0.$

6.8. $u_{xx} + u_{zz} - 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_x = 0.$

6.9. $u_{xx} + 9u_{yy} + 2u_{xy} - 2u_{yz} + 2u_x - u_z = 0.$

6.10. $u_{zz} - 2u_{xy} - 2u_{xz} - 2u_{yz} + u_x - u_z + 4u = 0.$

6.11. $4u_{xx} + u_{yy} + 2u_{xz} - 2u_{yz} + 2u_x - u = 0.$

6.12. $3u_{yy} + u_{zz} - 2u_{xy} + u_{xz} + u = 0.$

6.13 $u_{xx} + u_{yy} + 4u_{zz} - 2u_{yz} + 5u_x = 0.$

6.14. $4u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_z = 0.$

6.15. $u_{zz} + 4u_{xy} - 2u_{xz} + 4u_{yz} + u_y - 3u_z = 0.$

6.16. $u_{xx} + 2u_{yy} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_y = 0.$

6.17. $u_{xx} + -2u_{xy} - 2u_{xz} - 2u_{yz} = 0.$

6.18. $u_{yy} + 4u_{zz} + 8u_{xy} + 2u_{yz} - u = 0.$

6.19. $16u_{xx} + 8u_{xz} - 2u_{yz} + 5u_x - 8u = 0.$

6.20. $u_{zz} - 4u_{xy} - 4u_{xz} - 4u_{yz} + 8u_x = 0.$

6.21. $u_{xx} + 3u_{zz} + 4u_{xy} - 2u_{yz} = 0.$

6.22. $4u_{xx} + 8u_{xy} - 4u_{xz} - u_{yz} = 0.$

6.23. $2u_{xx} + u_{yy} + 2u_{xy} - 2u_{yz} + u = 0.$

6.24. $9u_{yy} + 3u_{zz} - 4u_{xz} + 2u_y - 8u = 0.$

6.25. $4u_{zz} - 2u_{xy} - 8u_{xz} - yz + 10u_z - u = 0.$

# Глава 3

# Задача Коши

## 3.1. Общее решение линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка

Как мы уже знаем, с помощью введения характеристических переменных можно упростить группу старших производных, а для уравнения с постоянными коэффициентами с помощью специальной замены неизвестной функции можно упростить группу младших производных. Таким образом, после приведения к каноническому виду и, если возможно, упрощения группы младших производных исходное уравнение значительно упрощается. Это дает возможность построить его общее решение.

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + L[u] = f(x,y), \qquad (3.1)$$

где $L[u]$ — линейный дифференциальный оператор с частными производными первого порядка.

Для того чтобы найти общее решение уравнения (3.1), необходимо:

1. Привести уравнение (3.1) к каноническому виду.

2. Решить уравнение в каноническом виде. При этом найдем функцию $u(\xi, \eta)$.

3. Вернуться к старым переменным и записать функцию $u(x, y)$, дающую общее решение исходного уравнения.

Заметим, что уравнение, которое получается после приведения исходного уравнения к каноническому виду, не всегда можно легко решить. В этом случае нужно применять другие методы решения.

Приведем примеры.

**Пример 3.1.** Найти общее решение уравнения

$$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0.$$

Приведем уравнение к каноническому виду:

1. Определим коэффициенты $A(x, y), B(x, y), C(x, y)$. В этом уравнении они не являются постоянными:

$$A(x, y) = 1, B(x, y) = -\sin x, C(x, y) = -\cos^2 x.$$

2. Посчитаем выражение $B^2 - AC$ :

$$B^2 - AC = (-\sin x)^2 - (-\cos^2 x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

3. Определим тип уравнения:

$$B^2 - AC = 1 > 0,$$

следовательно, это уравнение гиперболического типа во всей плоскости $XOY$.

4. Составим уравнение характеристик:

$$dy^2 + 2\sin x dx dy - \cos^2 x dx^2 = 0.$$

5. Решим уравнение характеристик:

$$dy = \frac{-\sin x \pm \sqrt{1}}{1} dx,$$

$$dy = (-\sin x \pm 1) dx,$$

$$y = \cos x \pm x + C.$$

Исходное уравнение имеет два семейства вещественных характеристик:

$$y + x - \cos x = C;$$

$$-y + x + \cos x = C.$$

6. Введем характеристические переменные

$$\xi = x + y - \cos x;$$

$$\eta = x - y + \cos x.$$

7. Пересчитаем производные, входящие в уравнение. Для удобства найдем сначала

$$\begin{aligned}
&\xi_x = 1 + \sin x, \quad \xi_y = 1, \\
&\eta_x = 1 - \sin x, \quad \eta_y = -1, \\
&\xi_{xx} = \cos x, \qquad \xi_{yy} = 0, \quad \xi_{xy} = 0, \\
&\eta_{xx} = -\cos x, \quad \eta_{yy} = 0, \quad \eta_{xy} = 0.
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{r|l}
0 & u = u(\xi(x,y), \eta(x,y)), \\
0 & u_x = u_\xi(1+\sin x) + u_\eta(1-\sin x), \\
-\cos x & u_y = u_\xi + u_\eta(-1), \\
1 & u_{xx} = u_{\xi\xi}(1+\sin x)^2 + 2u_{\xi\eta}(1+\sin x)(1-\sin x) + \\
 & \qquad + u_{\eta\eta}(1-\sin x)^2 + u_\xi \cos x + u_\eta(-\cos x), \\
-2\sin x & u_{xy} = u_{\xi\xi}(1+\sin x) + u_{\xi\eta}(1+\sin x)(-1) + \\
 & \qquad + u_{\eta\xi}(1-\sin x) + u_{\eta\eta}(-1)(1-\sin x), \\
-\cos^2 x & u_{yy} = u_{\xi\xi}(1)^2 + 2u_{\xi\eta}(-1) + u_{\eta\eta}(-1)^2.
\end{array}
$$

8. Расставим слева коэффициенты, на которые соответствующие производные умножаются в уравнении. Это позволит быстро привести подобные слагаемые:

$$
u_{\xi\xi}\underbrace{((1+\sin x)^2 - 2\sin x(1+\sin x) - \cos^2 x)}_{0} +
$$

$$
+u_{\xi\eta}\underbrace{((1+\sin x)(1-\sin x) - 2\sin x(1+\sin x)(-1) + 2\cos^2 x)}_{4} +
$$

$$
+u_{\eta\eta}\underbrace{((1-\sin x)^2 - 2\sin x(-1)(1-\sin x) - \cos^2 x(-1)^2)}_{0} +
$$

$$
+u_\xi(-\cos x + \cos x) + u_\eta(\cos x - \cos x) = 0.
$$

Итак, канонический вид исходного уравнения

$$
4u_{\xi\eta} = 0.
$$

Или

$$
u_{\xi\eta} = 0.
$$

Уравнение значительно упростилось. Его легко можно решить:

$$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Функция $u(\xi, \eta)$ — общее решение уравнения в каноническом виде.

Вернемся к старым переменным и получим общее решение исходного уравнения:

$$u(x, y) = f_1(x + y - \cos x) + f_2(x - y + \cos x).$$

**Ответ.** $u(x, y) = f_1(x + y - \cos x) + f_2(x - y + \cos x)$, где $f_1$ и $f_2$ — произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

**Пример 3.2.** Найти общее решение уравнения

$$x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0.$$

Приведем уравнение к каноническому виду.

1. Определим коэффициенты $A(x, y), B(x, y), C(x, y)$. В этом уравнении они также не являются постоянными:

$$A(x, y) = x^2, B(x, y) = -xy, C(x, y) = y^2.$$

2. Посчитаем выражение $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = (-xy)^2 - x^2y^2 = 0.$$

3. Определим тип уравнения:

$$B^2 - AC = 0,$$

следовательно, это уравнение параболического типа во всей плоскости $XOY$.

4. Составим уравнение характеристик:

$$x^2dy^2 + 2xydxdy + y^2dx^2 = 0.$$

5. Решим уравнение характеристик. Заметим, что в левой части последнего уравнения — полный квадрат:

$$(xdy + ydx)^2 = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0.$$

$$\ln y + \ln x = lnC.$$

Или

$$xy = C.$$

В данном случае имеем одно семейство вещественных характеристик.

6. Введем характеристические переменные $\xi = xy$. Пусть $\eta = y$.

7. Пересчитаем производные, входящие в уравнение. Для удобства найдем сначала

$$\begin{aligned}
&\xi_x = y, \quad \xi_y = x,\\
&\eta_x = 0, \quad \eta_y = 1,\\
&\xi_{xx} = 0, \ \ \xi_{yy} = 0, \ \ \xi_{xy} = 1,\\
&\eta_{xx} = 0, \ \ \eta_{yy} = 0, \ \ \eta_{xy} = 0.
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{r|l}
0 & u = u(\xi(x, y), \eta(x, y)), \\
x & u_x = u_\xi y, \\
y & u_y = u_\xi x + u_\eta, \\
x^2 & u_{xx} = u_{\xi\xi} y^2 \\
-2xy & u_{xy} = u_{\xi\xi} yx + u_{\xi\eta} y + u_\xi \\
y^2 & u_{yy} = u_{\xi\xi} x^2 + 2u_{\xi\eta} x + u_{\eta\eta}.
\end{array}
$$

8. Расставим слева коэффициенты, на которые соответствующие производные умножаются в уравнении. Это позволит быстро привести подобные слагаемые:

$$u_{\xi\xi} \underbrace{(y^2x^2 - 2x^2y^2 + x^2y^2)}_{0} + u_{\xi\eta} \underbrace{(-2xy^2 + 2xy^2)}_{0} +$$

$$+ u_{\eta\eta} y^2 + u_\xi(xy + xy - 2xy) + u_\eta y = 0.$$

Или

$$y^2 u_{\eta\eta} + u_\eta y = 0.$$

Выразив коэффициенты последнего уравнения через характеристические переменные $\xi$ и $\eta$ и поделив на коэффициент при $u_{\eta\eta}$, получим канонический вид исходного уравнения

$$u_{\eta\eta} + \frac{1}{\eta} u_\eta = 0.$$

Так же как и в предыдущем примере, уравнение значительно упростилось. Однако оно не такое простое, как раннее. Тем не менее его можно решить. Мы получили уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Оно неполное (нет функции $u$), поэтому его порядок можно понизить с помощью замены

$$u_\eta = v.$$

Осуществив эту замену, для функции $v$ получим уравнение с частными производными первого порядка с переменными коэффициентами

$$v_\eta + \frac{1}{\eta} v = 0.$$

Для решения этого уравнения применим формулу решения обыкновенных дифференциальных линейных уравнений первого порядка с той лишь разницей, что вместо произвольной постоянной будем писать произвольную функцию, зависящую от переменной, по которой не ведется интегрирование (в данном примере — от переменной $\xi$):

$$v(\xi, \eta) = e^{-\int \frac{1}{\eta} d\eta} \cdot f_1(\xi),$$

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{\eta} f_1(\xi),$$

где $f_1(\xi)$ — произвольная функция. Но $v = u_\eta$. Тогда имеем

$$u_\eta = \frac{f_1(\xi)}{\eta}.$$

Интегрируя по $\eta$ последнее уравнение и добавляя еще одну произвольную функцию, зависящую от $\xi$ (от переменной, по которой не ведется интегрирование), получим общее решение уравнения в каноническом виде

$$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) \ln \eta + f_2(\xi),$$

где $f_1(\xi), f_2(\xi)$ — произвольные функции.

Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение исходного уравнения

$$u(x, y) = f_1(xy) \ln y + f_2(xy).$$

Заметим, что в общем решении уравнений параболического типа, в отличие от уравнений гиперболического типа, содержатся две произвольных функции, зависящие от одной и той же переменной.

**Ответ.** $u(x, y) = f_1(xy) \ln y + f_2(xy)$,
где $f_1(xy)$ и $f_2(xy)$ — произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции.

**Пример 3.3 (пример выполнения задачи 7).**

Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y = 0.$

Приведем уравнение к каноническому виду:

1. Определим коэффициенты $A(x, y), B(x, y), C(x, y)$. В этом уравнении они постоянны:

$$A(x, y) = 1, B(x, y) = 1, C(x, y) = 1.$$

2. Посчитаем выражение $B^2 - AC$ :

$$B^2 - AC = 1 - 1 = 0$$

3. Определим тип уравнения:

$$B^2 - AC = 0,$$

следовательно, это уравнение параболического типа во всей плоскости $XOY$.

4. Составим уравнение характеристик

$$dy^2 - 2dxdy + dx^2 = 0.$$

Не забываем поменять знак коэффициента при смешанной производной!

5. Решим уравнение характеристик. Заметим, что в левой части последнего уравнения — полный квадрат:

$$(dy - dx)^2 = 0.$$

Это уравнение с разделенными переменными:

$$y - x = C.$$

В данном случае имеем одно семейство вещественных характеристик.

6. Введем характеристические переменные:

$$\xi = y - x.$$

Вторую переменную выбираем сами. Пусть

$$\eta = x.$$

7. Пересчитаем производные, входящие в уравнение. Для удобства найдем сначала

$$\xi_x = -1, \;\; \xi_y = 1,$$
$$\eta_x = 1, \quad \eta_y = 0,$$

Все производные второго порядка равны нулю.

$$
\begin{array}{c|l}
0 & u = u(\xi(x,y), \eta(x,y)), \\
4 & u_x = -u_\xi + u_\eta, \\
4 & u_y = u_\xi, \\
1 & u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\
2 & u_{xy} = -u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}, \\
1 & u_{yy} = u_{\xi\xi}.
\end{array}
$$

8. Расставим слева коэффициенты, на которые соответствующие производные умножаются в уравнении. Это позволит быстро привести подобные слагаемые:

$$u_{\xi\xi}\underbrace{(1-2+1)}_{0}+u_{\xi\eta}\underbrace{(-2+2)}_{0}+u_{\eta\eta}(1)+u_\xi(-4+4)+4u_\eta=0.$$

Или

$$u_{\eta\eta}+4u_\eta=0.$$

Это канонический вид исходного уравнения. Мы получили линейное уравнение с частными производными второго порядка, но, в отличие от предыдущего примера, оно с постоянными коэффициентами. Поэтому решить его можно не понижением порядка, а применяя методы решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений $n$-го порядка с постоянными коэффициентами. При этом, как и ранее, вместо произвольных постоянных будем писать произвольные функции, зависящие в данном случае от переменной $\xi$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 4\lambda = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -4$ — вещественны и различны. Поэтому общее решение запишется в виде

$$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\xi)e^{-4\eta}.$$

Возвращаясь к старым переменным, запишем общее решение исходного уравнения:

$$u(x, y) = f_1(y - x) + f_2(y - x)e^{-4x}.$$

**Ответ.** $u(x, y) = f_1(y-x)+f_2(y-x)e^{-4x}$, где $f_1(y-x)$ и $f_2(y-x)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

**Пример 3.4 (пример выполнения задачи 8).**

Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

$$u_{xx} + 18u_{xy} + 56u_{yy} = 0.$$

Приведем уравнение к каноническому виду:

1. Определим коэффициенты $A(x, y), B(x, y), C(x, y)$. В этом уравнении они постоянны:

$$A(x, y) = 1, B(x, y) = 9, C(x, y) = 56.$$

2. Посчитаем выражение $B^2 - AC$ :

$$B^2 - AC = 81 - 56 = 25.$$

3. Определим тип уравнения:

$$B^2 - AC = 25 > 0,$$

следовательно, это уравнение гиперболического типа во всей плоскости $XOY$.

4. Составим уравнение характеристик:

$$dy^2 - 18dxdy + 56dx^2 = 0.$$

Не забываем поменять знак коэффициента при смешанной производной!

5. Решим уравнение характеристик:

$$dy = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{1} dx,$$

$$dy = (9 \pm 5)dx,$$

$$y = (9 \pm 5)x + C.$$

Исходное уравнение имеет два семейства вещественных характеристик:

$$y - 14x = C;$$

$$y - 4x = C.$$

6. Введем характеристические переменные

$$\xi = y - 14x;$$

$$\eta = y - 4x.$$

7. Пересчитаем производные, входящие в уравнение.

Для удобства найдем сначала

$$\xi_x = -14, \;\; \xi_y = 1,$$
$$\eta_x = -4, \quad \eta_y = 1,$$

Все производные второго порядка равны нулю.

$$\begin{array}{r|l}
0 & u = u(\xi(x,y), \eta(x,y)), \\
0 & u_x = -14u_\xi - 4u_\eta, \\
0 & u_y = u_\xi + u_\eta, \\
1 & u_{xx} = (-14)^2 u_{\xi\xi} + 2(-14)(-4)u_{\xi\eta} + (-4)^2 u_{\eta\eta}, \\
18 & u_{xy} = (-14)u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} - 14u_{\xi\eta} - 4u_{\eta\eta}, \\
56 & u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.
\end{array}$$

8. Расставим слева коэффициенты, на которые соответствующие производные умножаются в уравнении. Это позволит быстро привести подобные слагаемые:

$$u_{\xi\xi} \underbrace{(196 - 252 + 56)}_{0} + u_{\xi\eta} \underbrace{(112 - 324 + 112)}_{-100} +$$
$$+ u_{\eta\eta} \underbrace{(16 - 72 + 56)}_{0} = 0.$$

Или

$$-100u_{\xi\eta} = 0.$$

Разделив на $-100$, получим канонический вид исходного уравнения:

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Такое уравнение мы уже встречали. Его общее решение имеет вид

$$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Возвращаясь к старым переменным, запишем общее решение исходного уравнения:

$$u(x,y) = f_1(y-14x) + f_2(y-4x).$$

**Ответ.** $u(x,y) = f_1(y-14x) + f_2(y-4x)$,
где $f_1(y-14x)$ и $f_2(y-4x)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

## 3.2. Решение задачи Коши для однородного волнового уравнения методом Даламбера

Рассмотрим свободные колебания бесконечной струны, т. е. достаточно длинной струны, влиянием концов которой на процесс колебаний можно пренебречь.

Причинами, вызывающими такие колебания, могут являться начальные отклонения струны от положения равновесия или сообщенный струне начальный импульс, обусловливающий некоторое распределение скоростей частиц струны. Поэтому, описывая свободные колебания бесконечной струны, мы должны рассмотреть однородное уравнение свободных колебаний

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{3.2}$$

где $a^2 = \frac{T}{\rho}$, $T$ — натяжение струны, $\rho$ — линейная плотность.

Поставим **задачу Коши**: в полуплоскости $t > 0$, $-\infty < x < \infty$ найти решение уравнения (3.2), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x), u_t\,|_{t=0} = \psi(x), \tag{3.3}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определяют профиль и скорости точек струны в начальный момент времени.

Приведем уравнение (3.2) к каноническому виду:

1. Определим коэффициенты $A, B, C$:

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -a^2.$$

2. Вычислим выражение $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = 0 + a^2 = a^2.$$

3. Определим тип уравнения (в зависимости от знака выражения $B^2 - AC$):

$$B^2 - AC = a^2 > 0,$$

т. е. уравнение является уравнением гиперболического типа.

4. Запишем уравнение характеристик:

$$dx^2 - a^2dt^2 = 0.$$

5. Решим уравнение характеристик. Оно распадается на два уравнения

$$dx - adt = 0,$$

$$dx + adt = 0.$$

Общие интегралы полученных уравнений (характеристики исходного уравнения):

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

6. Введем характеристические переменные

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

7. Пересчитаем все производные, входящие в исходное уравнение, используя правило дифференцирования сложной функции. Найдем сначала $\xi_x, \ \xi_y, \ \eta_x, \ \eta_y$:

$$\begin{aligned} &\xi_x = 1, && \xi_t = -a, \\ &\eta_x = 1, && \eta_t = a. \end{aligned}$$

Производные второго порядка от $\xi$ и $\eta$ равны нулю.

$$\begin{array}{r|l} 0 & u = u(\xi(x,y), \eta(x,y)), \\ 0 & u_x = u_\xi + u_\eta, \\ 0 & u_t = -au_\xi + au_\eta, \\ -a^2 & u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\ 1 & u_{tt} = a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta}. \end{array}$$

Здесь слева записаны коэффициенты исходного уравнения при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим

$$u_{\xi\xi}\{-a^2 + a^2\} + u_{\xi\eta}\{-2a^2 - 2a^2\} + u_{\eta\eta}\{-a^2 + a^2\} = 0.$$

Или после деления на $-4a^2$ (коэффициент при $u_{\xi\eta}$)

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

где $f_1$ и $f_2$ — произвольные функции.

Вернемся к старым переменным и получим общее решение исходного уравнения

$$u(x,t) = f_1(x-at) + f_2(x+at), \qquad (3.4)$$

где $f_1$ и $f_2$ — произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Определим эти функции так, чтобы выполнялись начальные условия (3.3). Для этого подставим функцию (3.4) в условия (3.3):

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \qquad (3.5)$$

$$u_t(x,0) = -af_1'(x) + af_2'(x) = \psi(x). \qquad (3.6)$$

Для определения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеем систему двух уравнений (3.5) и (3.6), одно из которых алгебраическое, а второе дифференциальное. Продифференцируем уравнение (3.5) по $x$. Тогда получим алгебраическую систему уравнений относительно производных $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$

$$\begin{cases} f_1'(x) + f_2'(x) = \varphi'(x), \\ -af_1'(x) + af_2'(x) = \psi(x). \end{cases} \qquad (3.7)$$

Умножим первое уравнение системы (3.7) на $a$ и сложим со вторым:

$$2af_2'(x) = a\varphi'(x) + \psi(x).$$

Откуда

$$f_2'(x) = \frac{1}{2a}\left(a\varphi'(x) + \psi(x)\right).$$

Мы получили простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение. Решая его, найдем функцию $f_2(x)$

$$f_2(x) = \frac{1}{2a}\int_0^x (a\varphi'(z) + \psi(z))\,dz =$$
$$= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz.$$

Мы нашли функцию $f_2(x)$. Для отыскания функции $f_1(x)$ не нужно продолжать решать систему (3.7). Значительно проще ее найти из уравнения (3.5):

$$f_1(x) = -f_2(x) + \varphi(x) =$$
$$= -\frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(0) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz + \varphi(x),$$
$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(0) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz.$$

Подставим найденные функции в общее решение (3.4):

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) + \frac{1}{2}\varphi(0) - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(z)dz +$$
$$+\frac{1}{2}\varphi(x+at) - \frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(z)dz.$$

Приведя подобные слагаемые и воспользовавшись свойствами определенного интеграла, получим

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz. \qquad (3.8)$$

Формула (3.8) называется формулой Даламбера. Она дает решение задачи Коши в случае одномерного волнового уравнения.

**Пример 3.5 (пример выполнения задачи 9).**

Решить задачу Коши

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, t > 0;$$

$$u\,\big|_{t=0} = \cos x,$$

$$u_t\,\big|_{t=0} = 0.$$

Это задача Коши для волнового уравнения. Для ее решения воспользуемся формулой Даламбера (3.8). У нас

$$a^2 = 4, \quad \varphi(x) = \cos x, \quad \psi(x) = 0;$$

$$u(x,t) = \frac{\cos(x-2t) + \cos(x+2t)}{2} = \cos x \cos 2t.$$

**Ответ.** $u(x,t) = \cos x \cos 2t$. Этот ответ можно легко проверить, подставив функцию $u$ в уравнение и в начальные условия.

**Пример 3.6.** Решить задачу Коши

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, t > 0;$$

$$u\,\big|_{t=0} = x,$$

$$u_t\,\big|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Это задача Коши для волнового уравнения. Для ее решения воспользуемся формулой Даламбера (3.8). У нас

$$a^2 = 1, \quad \varphi(x) = x, \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$u = \frac{(x-t)+(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz =$$

$$= x + \frac{1}{2} \arcsin z \Big|_{x-t}^{x+t} =$$

$$= x + \frac{\arcsin(x+t) - \arcsin(x-t)}{2}.$$

**Ответ.** $u = x + \frac{\arcsin(x+t) - \arcsin(x-t)}{2}$.

## 3.3. Задача Коши для неоднородного волнового уравнения. Принцип Дюамеля

Рассмотрим неоднородное волновое уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \tag{3.9}$$

где $a^2 = \frac{T}{\rho}$, $T$ — натяжение струны, $\rho$ — линейная плотность.

Поставим **задачу Коши**: в полуплоскости $t > 0$, $-\infty < x < \infty$ найти решение уравнения (3.2), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x), u_t\,|_{t=0} = \psi(x). \tag{3.10}$$

Решение этой задачи будем искать в виде суммы двух функций

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

где функция $v(x,t)$ является решением задачи

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \tag{3.11}$$

$$v\,|_{t=0} = \varphi(x), v_t\,|_{t=0} = \psi(x), \tag{3.12}$$

а функция $w(x,t)$ — решение задачи

$$w_{tt} = a^2 w_{xx} + f(x,t), \tag{3.13}$$

$$w\,|_{t=0} = 0, w_t\,|_{t=0} = 0. \tag{3.14}$$

Решение задачи (3.11)—(3.12) дается формулой Даламбера (3.8)

$$v(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz.$$

Для решения задачи (3.13)—(3.14) воспользуемся принципом Дюамеля.

**Теорема (принцип Дюамеля).** Если функция $v(x,t,\tau)$ — есть решение задачи Коши для однородного уравнения с неоднородными начальными условиями

$$v_{tt} = a^2 v_{xx},$$

$$v\,|_{t=\tau} = 0, v_t\,|_{t=\tau} = f(x,\tau),$$

тогда функция

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau)d\tau$$

является решением задачи Коши для неоднородного уравнения с однородными начальными условиями

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),$$

$$u\,|_{t=\tau} = 0, u_t\,|_{t=\tau} = 0.$$

При этом задачу для функции $v(x,t)$ называют сопутствующей задачей.

Для задачи (3.13)—(3.14) составим сопутствующую задачу

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \tag{3.15}$$

$$v\,|_{t=\tau} = 0, v_t\,|_{t=\tau} = f(x, \tau). \tag{3.16}$$

Чтобы для решения этой задачи воспользоваться формулой Даламбера, сделаем замену переменных

$$t_1 = t - \tau.$$

В новых переменных задача (3.15)—(3.16) запишется так

$$v_{t_1 t_1} = a^2 v_{xx},$$

$$v\,|_{t_1=0} = 0, v_{t_1}\,|_{t_1=0} = f(x, \tau).$$

Решение последней задачи Коши запишем по формуле Даламбера, в которой

$$\varphi(x) = 0, \psi(x) = f(x, \tau).$$

Имеем

$$v(x, t_1, \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-at_1}^{x+at_1} f(z, \tau) dz.$$

Возвращаясь к переменным $(x, t)$, получим решение задачи (3.15)—(3.16)

$$v(x, t, \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau) dz.$$

Тогда, согласно принципу Дюамеля, решение задачи (3.13)—(3.14) дается формулой

$$w(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left( \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau) dz \right) d\tau.$$

А решение исходной задачи (3.9)—(3.10) имеет вид

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz + \\ + \frac{1}{2a}\int_0^t \left(\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dz\right)d\tau. \tag{3.17}$$

**Пример 3.7 (пример выполнения задачи 10).**

Решить задачу Коши

$$u_{tt} = 4u_{xx} + t,$$

$$u\,|_{t=0} = \sin x,$$

$$u_t\,|_{t=0} = 0.$$

При решении этого примера можно повторить все выкладки, приведенные выше, а можно сразу воспользоваться формулой (3.17). У нас

$$a = 2, \quad f = t, \quad \varphi(x) = \sin x, \quad \psi(x) = 0.$$

Подставляя эти функции в формулу (3.17), получим

$$u(x,t) = \frac{\sin(x-2t)+\sin(x+2t)}{2} + \\ + \frac{1}{4}\int_0^t \left(\int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} \tau dz\right)d\tau.$$

Таким образом, необходимо только взять интеграл:

$$\frac{1}{4}\int_0^t \left(\int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} \tau dz\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \left(\tau z\Big|_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \left(\tau(x + 2t - 2\tau - x + 2t - 2\tau)\right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t (\tau(4t - 4\tau) d\tau = \frac{t\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3}\Big|_0^t = \frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{3} = \frac{t^3}{6}.$$

Теперь можно записать решение рассматриваемой задачи

$$u(x,t) = \frac{\sin(x - 2t) + \sin(x + 2t)}{2} + \frac{t^3}{6}.$$

Несложно проверить, что эта функция действительно удовлетворяет уравнению и заданным начальным условиям.

## 3.4. Задача Коши для произвольного уравнения гиперболического типа

Методом характеристик можно решить задачу Коши для произвольного уравнения гиперболического типа. Рассмотрим примеры.

**Пример 3.8.** Решить задачу Коши

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0,\ -\infty < x < \infty, y > 0,$$

$$u\,|_{y=0} = 3x^2,$$

$$u_y\,|_{y=0} = 0.$$

В этом примере уравнение не является волновым, поэтому формулой Даламбера воспользоваться не можем.

Для того чтобы решить эту задачу, необходимо:

1. Привести уравнение к каноническому виду.

2. Найти общее решение уравнения в каноническом виде.

3. Вернуться к старым переменным и записать общее решение исходного уравнения.

4. С помощью начальных условий определить произвольные функции, входящие в общее решение.

5. Подставить найденные функции в общее решение, привести подобные слагаемые и записать ответ.

Приведем уравнение к каноническому виду:

1. Определим коэффициенты $A, B, C$:

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = -3.$$

2. Вычислим выражение $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = 1 + 3 = 4.$$

3. Определим тип уравнения (в зависимости от знака выражения $B^2 - AC$):

$$B^2 - AC = 4 > 0,$$

т. е. уравнение является уравнением гиперболического типа.

4. Запишем уравнение характеристик:

$$dy^2 - 2dxdy - 3dx^2 = 0.$$

5. Решим уравнение характеристик. Для этого:

1) разрешим уравнение характеристик как квадратное уравнение относительно $dy$:

$$dy = \frac{1 \pm \sqrt{4}}{1} dx;$$

$$dy = (1 \pm 2)dx;$$

$$dy = 3dx, \quad dy = dx;$$

2) найдем общие интегралы полученных уравнений (характеристики исходного уравнения):

$$y - 3x = C_1, \quad y + x = C_2.$$

6. Введем характеристические переменные

$$\xi = y - 3x, \quad \eta = y + x.$$

7. Пересчитаем все производные, входящие в исходное уравнение, используя правило дифференцирования сложной функции. Для удобства найдем $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$:

$$\begin{array}{ll} \xi_x = -3, & \xi_y = 1 \\ \eta_x = 1, & \eta_y = 1. \end{array}$$

Производные второго порядка от $\xi$ и $\eta$ равны нулю.

$$\begin{array}{r|l} 0 & u = u(\xi(x,y), \eta(x,y)), \\ 0 & u_x = -3u_\xi + u_\eta, \\ 0 & u_y = u_\xi + u_\eta, \\ 1 & u_{xx} = 9u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\ 2 & u_{xy} = -3u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\ \text{-3} & u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}. \end{array}$$

Здесь слева записаны коэффициенты исходного уравнения при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим

$$u_{\xi\xi}\{9 - 6 - 3\} + u_{\xi\eta}\{-6 - 4 - 6\} + u_{\eta\eta}\{1 + 2 - 3\} = 0.$$

Или после деления на $-16$ (коэффициент при $u_{\xi\eta}$)

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(\xi,\eta) = f_1(\xi,\eta) + f_2(\xi,\eta).$$

Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение исходного уравнения

$$u(x,y) = f_1(y-3x) + f_2(x+y).$$

Подставив это решение в начальные условия, получим два уравнения

$$u\,|_{y=0} = f_1(-3x) + f_2(x) = 3x^2,$$

$$u_y\,|_{y=0} = f_1'(-3x) + f_2'(x) = 0.$$

Продифференцируем первое из этих уравнений по $x$, а второе уравнение оставим без изменения:

$$\begin{cases} -3f_1'(-3x) + f_2'(x) = 6x, \\ f_1'(-3x) + f_2'(x) = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим

$$-4f_1'(-3x) = 6x.$$

Чтобы удобнее интегрировать последнее уравнение и подставлять результат интегрирования в общее решение, введем новую переменную $z = -3x$:

$$f_1'(z) = \frac{1}{2}z.$$

Тогда
$$f_1(z) = \frac{z^2}{4} + C.$$

Находим $f_2(x)$
$$f_2(x) = 3x^2 - f_1(-3x) = 3x^2 - \frac{9x^2}{4} - C = \frac{3x^2}{4} - C.$$

Подставляя найденные функции в общее решение, получим
$$u(x,y) = \frac{(y-3x)^2}{4} + C + \frac{3(x+y)^2}{4} - C = 3x^2 + y^2.$$

**Ответ.** $u(x,y) = 3x^2 + y^2$.

**Пример 3.9.** Решить задачу Коши
$$4y^2 u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0,$$
$$-\infty < x < \infty, y > 0,$$
$$u\,|_{y=0} = \varphi(x),$$
$$u_y\,|_{y=0} = \psi(x).$$

В этом примере, как и в предыдущем, уравнение не является волновым, поэтому формулой Даламбера воспользоваться не можем. Кроме того, начальные функции не заданы явно. Поэтому при отыскании произвольных функций, входящих в общее решение, будем брать интегралы с переменным верхним пределом.

Приведем уравнение к каноническому виду:

1. Определим коэффициенты $A, B, C$:
$$A = 4y^2, \quad B = (1-y^2), \quad C = -1.$$

2. Вычислим выражение $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = (1 - y^2)^2 + 4y^2 = (1 + y^2)^2.$$

3. Определим тип уравнения (в зависимости от знака выражения $B^2 - AC$):

$$B^2 - AC = (1 + y^2)^2 > 0,$$

т. е. уравнение является уравнением гиперболического типа.

4. Запишем уравнение характеристик:

$$4y^2dy^2 - 2(1 - y^2)dxdy - dx^2 = 0.$$

5. Решим уравнение характеристик. Для этого:

1) разрешим уравнение характеристик как квадратное уравнение относительно $dy$:

$$dy = \frac{(1 - y^2) \pm \sqrt{(1 + y^2)^2}}{4y^2}dx;$$

$$dy = -\frac{1}{2}dx, \quad dy = \frac{1}{2y^2}dx;$$

2) найдем общие интегралы полученных уравнений (характеристики исходного уравнения):

$$2y + x = C_1, \quad \frac{2}{3}y^3 - x = C_2.$$

6. Введем характеристические переменные

$$\xi = x + 2y, \quad \eta = \frac{2}{3}y^3 - x.$$

7. Пересчитаем все производные, входящие в исходное уравнение, используя правило дифференцирования сложной функ-

ции. Для удобства найдем $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y, \xi_{xx}, \xi_{xy}, \xi_{yy}, \eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yy}$:

$$\begin{array}{lll} \xi_x = 1, & \xi_y = 2, & \\ \eta_x = -1, & \eta_y = 2y^2, & \\ \xi_{xx} = 0, & \xi_{xy} = 0, & \xi_{yy} = 0 \\ \eta_{xx} = 0, & \eta_{xy} = 0, & \eta_{yy} = 4y. \end{array}$$

Находим производные

$$\begin{array}{r|l} 0 & u = u(\xi(x,y), \eta(x,y)), \\ \frac{-4y}{1+y^2} & u_x = u_\xi - u_\eta, \\ \frac{2y}{1+y^2} & u_y = 2u_\xi + 2y^2 u_\eta, \\ 4y^2 & u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\ 2(1-y^2) & u_{xy} = 2u_{\xi\xi} + (-2+2y^2)u_{\xi\eta} - 2y^2 u_{\eta\eta}, \\ -1 & u_{yy} = 4u_{\xi\xi} + 8y^2 u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + 4y u_\eta. \end{array}$$

Здесь слева записаны коэффициенты исходного уравнения при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим

$$u_{\xi\xi}\{4y^2+4(1-y^2)-4\}+u_{\xi\eta}\{-8y^2+2(1-y^2)(-2+2y^2)-8y^2\}+$$
$$+u_{\eta\eta}\{4y^2-4y^2(1-y^2)-8y^2\}+u_\xi\left\{\frac{-4y}{1+y^2}+\frac{4y}{1+y^2}\right\}+$$
$$+u_\eta\left\{\frac{4y}{1+y^2}+\frac{4y^3}{1+y^2}-4y\right\}=0.$$

Или после деления на $(-4(1+y^2)^2)$ (коэффициент при $u_{\xi\eta}$)

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(\xi, \eta) = f_1(\xi, \eta) + f_2(\xi, \eta).$$

Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение исходного уравнения

$$u(x,y) = f_1(x+2y) + f_2(\frac{2}{3}y^3 - x).$$

Подставив это решение в начальные условия, получим два уравнения

$$u\,|_{y=0} = f_1(x) + f_2(-x) = \varphi(x),$$

$$u_y\,|_{y=0} = 2f_1'(x) = \psi(x).$$

Последнее уравнение можно проинтегрировать

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \psi(z)dz.$$

Тогда

$$f_2(-x) = \varphi(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \psi(z)dz.$$

Чтобы было удобнее подставлять найденные функции в общее решение, в функции $f_2$ сделаем замену переменной

$$t = -x$$

$$f_2(t) = \varphi(-t) - \frac{1}{2}\int_0^{-t} \psi(z)dz.$$

Теперь, подставив $f_1$ и $f_2$ в общее решение, получим

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^{x+2y} \psi(z)dz + \varphi(-\frac{2}{3}y^3 + x) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{-\frac{2}{3}y^3+x)} \psi(z)dz = \varphi(x - \frac{2}{3}y^3) + \frac{1}{2}\int_{x-\frac{2}{3}y^3}^{x+2y} \psi(z)dz.$$

**Ответ.** $u(x,y) = \varphi(x - \frac{2}{3}y^3) + \frac{1}{2}\int_{x-\frac{2}{3}y^3}^{x+2y} \psi(z)dz.$

## 3.5. Индивидуальные задания к главе 3

### Задача 7

Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

7.1. $u_{xx} + 14u_{xy} + 49u_{yy} + 2u_x + 14u_y = 0.$

7.2. $36u_{xx} - 12u_{xy} + u_{yy} + 18u_x - 3u_y = 0.$

7.3. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 6u_x - 6u_y = 0.$

7.4. $u_{xx} - 10u_{xy} + 25u_{yy} + 5u_x - 25u_y = 0.$

7.5. $36u_{xx} + 12u_{xy} + u_{yy} + 18u_x + 3u_y = 0.$

7.6. $25u_{xx} + 10u_{xy} + u_{yy} + 20u_x + 4u_y = 0.$

7.7. $25u_{xx} - 10u_{xy} + u_{yy} - 15u_x + 3u_y = 0.$

7.8. $u_{xx} - 10u_{xy} + 25u_{yy} + 2u_x - 10u_y = 0.$

7.9. $u_{xx} + 10u_{xy} + 25u_{yy} + u_x + 5u_y = 0.$

7.10. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x - 3u_y = 0.$

7.11. $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} + u_x + 3u_y = 0.$

7.12. $9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 12u_x - 4u_y = 0.$

7.13. $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 8u_x + 4u_y = 0.$

7.14. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x - 4u_y = 0.$

7.15. $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - u_x - 2u_y = 0.$

7.16. $9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 9u_x - 3u_y = 0.$

7.17. $u_{xx} - 12u_{xy} + 36u_{yy} + 2u_x - 12u_y = 0.$

7.18. $u_{xx} + 12u_{xy} + 36u_{yy} + u_x + 6u_y = 0.$

7.19. $u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} + 5u_x + 20u_y = 0.$

7.20. $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} + 5u_x + 15u_y = 0.$

7.21. $4u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 10u_x + 5u_y = 0.$

7.22 $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 5u_x + 5u_y = 0.$

7.23. $16u_{xx} + 8u_{xy} + u_{yy} - 16u_x + 4u_y = 0.$

7.24. $u_{xx} - 8u_{xy} + 16u_{yy} + 3u_x - 12u_y = 0.$

7.25. $16u_{xx} + 8u_{xy} + u_{yy} - 8u_x - 2u_y = 0.$

## Задача 8

Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

8.1. $4u_{xx} + 4u_{xy} - u_{yy} = 0.$

8.2. $147u_{xx} + 28u_{xy} + u_{yy} = 0.$

8.3. $u_{xx} + 16u_{xy} + 48u_{yy} = 0.$

8.4. $75u_{xx} + 20u_{xy} + u_{yy} = 0.$

8.5. $49u_{xx} + 28u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$

8.6. $3u_{xx} + 20u_{xy} + 25u_{yy} = 0.$

8.7. $u_{xx} + 8u_{xy} + 12u_{yy} = 0.$

8.8. $3u_{xx} + 28u_{xy} + 49u_{yy} = 0.$

8.9. $27u_{xx} + 12u_{xy} + u_{yy} = 0.$

8.10. $75u_{xx} + 20u_{xy} + u_{yy} = 0.$

8.11. $u_{xx} + 5u_{xy} + 6u_{yy} = 0.$

8.12. $4u_{xx} + 3u_{xy} - u_{yy} = 0.$

8.13. $u_{xx} + 8u_{xy} + 12u_{yy} = 0.$

8.14. $3u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} = 0.$

8.15. $u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$

8.16. $3u_{xx} + 8u_{xy} + 4u_{yy} = 0.$

8.17. $192u_{xx} + 32u_{xy} + u_{yy} = 0.$

8.18. $48u_{xx} + 16u_{xy} + u_{yy} = 0.$

8.19. $3u_{xx} + 32u_{xy} + 64u_{yy} = 0.$

8.20. $u_{xx} + 36u_{xy} + 243u_{yy} = 0.$

8.21. $u_{xx} + 28u_{xy} + 147u_{yy} = 0.$

8.22. $u_{xx} + 20u_{xy} + 75u_{yy} = 0.$

8.23. $u_{xx} + 12u_{xy} + 27u_{yy} = 0.$

8.24. $u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0.$

8.25. $64u_{xx} + 32u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$

## Задача 9

Решить задачу Коши для однородного волнового уравнения:

9.1. $$\begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(x,0) = 1/(1+x^2), \quad u_t(x,0) = 0. \end{array}$$

9.2. $$\begin{array}{l} u_{tt} = 3u_{xx}, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = 0. \end{array}$$

9.3. $$\begin{array}{l} u_{tt} = 2u_{xx}, \\ u(x,0) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(x+1), \quad u_t(x,0) = 0. \end{array}$$

9.4. $$\begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x/(1+x^2). \end{array}$$

9.5. $$\begin{array}{l} u_{tt} = 3u_{xx}, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 1/(\operatorname{ch} x). \end{array}$$

9.6. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 2u_{xx}, \\ &u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = xe^{x^2/2}. \end{aligned}$$

9.7. $$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \\ &u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = xe^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

9.8. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 2u_{xx}, \\ &u(x,0) = 1/(1+x^2), \quad u_t(x,0) = x^2/(1+x^6). \end{aligned}$$

9.9. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 3u_{xx}, \\ &u(x,0) = 1/(\operatorname{ch} x), \quad u_t(x,0) = 1/(1+x^2). \end{aligned}$$

9.10. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 5u_{xx}, \\ &u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = 1/(\operatorname{ch} x). \end{aligned}$$

9.11. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx}, \\ &u(x,0) = 1/(1+x^2), \quad u_t(x,0) = x. \end{aligned}$$

9.12. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx}, \\ &u(x,0) = 3e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = x^2. \end{aligned}$$

9.13. $$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \\ &u(x,0) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(x+1), \quad u_t(x,0) = x+1. \end{aligned}$$

9.14. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 25u_{xx}, \\ &u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 1/(1+x^2). \end{aligned}$$

9.15. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 16u_{xx}, \\ &u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = 1/(\operatorname{ch} x). \end{aligned}$$

9.16. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 4u_{xx},\\ &u(x,0) = 8 - x, \quad u_t(x,0) = xe^{x^2/2}.\end{aligned}$$

9.17. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 36u_{xx},\\ &u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = x.\end{aligned}$$

9.18. $$\begin{aligned}&u_{tt} = u_{xx},\\ &u(x,0) = 1/(1+x^2), \quad u_t(x,0) = 1/x.\end{aligned}$$

9.19. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 9u_{xx},\\ &u(x,0) = e^{x}, \quad u_t(x,0) = 1/(1+x^2).\end{aligned}$$

9.20. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 25u_{xx},\\ &u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = \cos x.\end{aligned}$$

9.21. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 8u_{xx},\\ &u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 1/(1+x^2).\end{aligned}$$

9.22. $$\begin{aligned}&u_{tt} = u_{xx},\\ &u(x,0) = e^{x^2-1}, \quad u_t(x,0) = 1/(\operatorname{ch} x)\end{aligned}$$

9.23. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 49u_{xx},\\ &u(x,0) = 8x, \quad u_t(x,0) = xe^{x^2/2}.\end{aligned}$$

9.24. $$\begin{aligned}&u_{tt} = u_{xx},\\ &u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = x^2 - x.\end{aligned}$$

9.25. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 4u_{xx},\\ &u(x,0) = x/(1+x^2), \quad u_t(x,0) = 4x^3/(1+x^4).\end{aligned}$$

## Задача 10

Решить задачу Коши для неоднородного волнового уравнения:

10.1. $u_{tt} = 4u_{xx} + 5t,$
$u(x,0) = \sin(x-1), \quad u_t(x,0) = 0.$

10.2. $u_{tt} = u_{xx} - x,$
$u(x,0) = 1/(1+x^2), \quad u_t(x,0) = 0.$

10.3. $u_{tt} = 9u_{xx} + 3t,$
$u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = 0.$

10.4. $u_{tt} = 16u_{xx} + 4t,$
$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = xe^{-x^2/2}.$

10.5. $u_{tt} = 9u_{xx} - x,$
$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = e^{-x^2}.$

10.6. $u_{tt} = u_{xx} - 8t,$
$u(x,0) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(x+1), \quad u_t(x,0) = xe^{x^2/2}.$

10.7. $u_{tt} = 9u_{xx} - 2x,$
$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 1/(1+x^2).$

10.8. $u_{tt} = 25u_{xx} + 4t,$
$u(x,0) = 1/(1+x^2), \quad u_t(x,0) = x^2/(1+x^6).$

10.9. $u_{tt} = u_{xx} - 6x,$
$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 1/(1+x^2).$

10.10. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 9u_{xx} + t,\\ &u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 1/(\operatorname{ch} x).\end{aligned}$$

10.11. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 9u_{xx} - 2tx,\\ &u(x,0) = 1/(\sin x), \quad u_t(x,0) = 0.\end{aligned}$$

10.12. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 4u_{xx} + e^x,\\ &u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = e^x.\end{aligned}$$

10.13. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 16u_{xx} + 2t,\\ &u(x,0) = \ln(x-1), \quad u_t(x,0) = 2x.\end{aligned}$$

10.14. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 4u_{xx} + 2x,\\ &u(x,0) = e^{x+2}, \quad u_t(x,0) = 0.\end{aligned}$$

10.15. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 9u_{xx} - 8t,\\ &u(x,0) = \ln\cos x, \quad u_t(x,0) = 0.\end{aligned}$$

10.16. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 36u_{xx} + 4x,\\ &u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 1/(\operatorname{ch} x).\end{aligned}$$

10.17. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 9u_{xx} - 7t,\\ &u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = xe^{-x^2}.\end{aligned}$$

10.18. $$\begin{aligned}&u_{tt} = u_{xx} + xt,\\ &u(x,0) = x/(\cos x), \quad u_t(x,0) = 0.\end{aligned}$$

10.19. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 4u_{xx} - 3xt,\\ &u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = xe^{x^2/2}.\end{aligned}$$

10.20. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx} + 2t, \\ &u(x,0) = \sin x + 2\cos x, \quad u_t(x,0) = 0. \end{aligned}$$

10.21. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx} - 5x, \\ &u(x,0) = xe^{2x-1}, \quad u_t(x,0) = 0. \end{aligned}$$

10.22. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx} - 2x, \\ &u(x,0) = e^x/(x^2-1), \quad u_t(x,0) = 0. \end{aligned}$$

10.23. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx} - 4t, \\ &u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 4x^3/(1+x^4). \end{aligned}$$

10.24. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx} - 5t, \\ &u(x,0) = 1/(1+x^2), \quad u_t(x,0) = x. \end{aligned}$$

10.25. $$\begin{aligned} &u_{tt} = 16u_{xx} + 6t, \\ &u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x/(1+x^2). \end{aligned}$$

# Рекомендуемая литература


1. Алиев Р.Г. Сборник задач по уравнениям в частных производных/ Р.Г. Алиев. –М. : Наука, 2006. –128 с.

2. Бицадзе А. В. Сборник задач по уравнениям математической физики/ А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко. –М. : Наука, 1985. –222 с.

3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. –М. : Наука,1988. –777 с.

4. Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики/ В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, А.А. Вашарин, Х.Х. Каримов, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин.–М. : Наука,1988. –288 с.

5. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. –М. : Высшая школа, 1970.–710 с.

6. Курант Р. Уравнения с частными производными: Пер.с англ. / Р. Курант. –М. : Мир, 1964.–830 с.

7. Мартинсон Л.К. Дифференциальные уравнения математической физики/ Л.К. Мартинсон, Ю.И.Малов. –М.Изд - во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 1996. –364 с.

8. Михлин С.Г. Курс математической физики/ С.Г. Михлин. –М. : Наука, 1968. –576 с.

9. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский.–М. : Наука, 1999. –742 с.