* الحاجة الى توسيع مجموعة الاعداد الحقيقية :-

$$\boxed{N \subset W \subset Z \subset Q \subset R}$$

مثال ① حل المعادلة $x^2+1=0$ في مجموعة الاعداد الحقيقية :

الحل :-

$$x^2+1=0$$

$$x^2=-1 \quad \text{يهمل}$$

مثال / حل المعادلة $x^2+1=0$ في مجموعة الاعداد المركبة .

الحل :-

$$x^2+1=0$$

$$x^2=-1 \quad \text{بالجذر التربيعي}$$

$$x=\pm\sqrt{-1}$$

$$x=\pm i$$

$$S=\{-i, i\}$$

الخلاصة ⇐ الوحدة التخيلية $i=\sqrt{-1}$

قوى i :-

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$\boxed{i^2 = -1}$

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\, i = -i$

$\boxed{i^3 = -i}$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$

$\boxed{i^4 = 1}$

ملاحظة

$i^{4n+r} = i^r$, $n \in \omega$, $r = 0, 1, 2, 3$

$i^5 = i^{4(1)+1} = i^1 = i$

$i^6 = i^{4(1)+2} = i^2 = -1$

$i^7 = i^{4(1)+3} = i^3 = -i$

$i^8 = i^{4(2)+0} = i^0 = 1$

$i^4 = 1$

$i^8 = 1$

$i^{12} = 1$

$i^2 = -1$ $\qquad$ $i^{4n+r} = i^{r}$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

ضع في ابسط صورة

① $i^{27} = i^{4(6)+3} = i^{3} = -i$

② $i^{25} = i^{4(6)+1} = i^{1} = i$

③ $i^{81} = i^{4(20)+1} = i^{1} = i$

④ $i^{12} = 1$

ناتج قوى i ⇐ $1, -1, i, -i$

$i^2=-1$	$i^3=-i$	$i^4=1$

س② ضع في ابسط صورة

① i^{-7}

الطريقة الاولى

$= i^{-8} \cdot i^{1}$

$= (1)(i)$

$= i$

الطريقة الثانية

i^{-7}

$= \frac{1}{i^7} = \frac{i^8}{i^7}$

$= i$

② i^{-15}

$= i^{-16} \cdot i^{1}$

$= (1)(i)$

$= i$

i^{-15}

$= \frac{1}{i^{15}} = \frac{i^{16}}{i^{15}}$

$= i$

③ i^{-18}

$= i^{-20} \cdot i^{2}$

$= (1)(-1)$

$= -1$

i^{-18}

$= \frac{1}{i^{18}} = \frac{i^{20}}{i^{18}}$

$= i^2$

$= -1$

واجب ② ضع في ابسط صورة

① i^{-6}

② i^{-13}

③ i^{-19}

الاعداد المركبة

محاضرة رقم 2

$$i=\sqrt{-1}$$

$$\boxed{i^2=-1}$$

$$\boxed{i^3=-i}$$

$$\boxed{i^4=1} \qquad i^8=1 \quad , \quad i^{12}=1$$

$$i^{4n+r}=i^r \qquad r=0,1,2,3$$

$$i^{4n}=(i^4)^n=(1)^n=1$$

$$i^{8n}=(i^4)^{2n}=(1)^{2n}=1$$

س③ اكتب ما يلي في ابسط صورة

a) $i^{16} = i^{4(4)+0} = i^{0} = 1$

او $i^{16} = 1$

b) $i^{58} = i^{4(14)+2} = i^{2} = -1$

c) $i^{12n+93} = i^{12n} \cdot i^{93}$

$= (i^{4})^{3n} \cdot i^{4(23)+1}$

$= (1)^{3n} \cdot i^{1}$

$= (1) \cdot i = i$

d) $i^{-13} = \frac{1}{i^{13}} = \frac{i^{16}}{i^{13}} = i^{3} = -i$

س③ اكتب مايلي في ابسط صورة
واجب

a) i^{-32}

الجواب ‖ 1

b) i^{97}

الجواب ‖ i

c) i^{16n+45}

الجواب ‖ i

d) i^{-23}

ملاحظة : يمكننا كتابة الجذور التربيعيه لأي عدد حقيقي سالب بدلالة i فمثلاً :

* $\sqrt{-16} = \sqrt{16} \times \sqrt{-1} = 4i$

* $\sqrt{-25} = \sqrt{25} \times \sqrt{-1} = 5i$

* $\sqrt{-12} = \sqrt{12} \times \sqrt{-1} = 2\sqrt{3}\, i$

$$2\left(\begin{array}{c|c} 2 & 12 \\ 2 & 6 \\ \sqrt{3} & 3 \\ & 1 \end{array}\right.$$

* $\sqrt{-15} = \sqrt{15} \times \sqrt{-1} = \sqrt{15}\, i$

$\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a}\, i$ ⇐ بصورة عامه

$\sqrt{-36} = 6i$

ملخص المحاضرة ①

$i = \sqrt{-1}$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$

ملخص المحاضرة ②

ملاحظة ⇐ $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1} = \sqrt{a}\, i$

$\sqrt{-4} = -2$ ✗ خطأ

$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = 2i$ ✓ صح

$\sqrt{-9} = 3i$

تعريف ①

يقال للعدد $c=a+bi$ حيث a,b عددان حقيقيان $i=\sqrt{-1}$ عدد مركب
يسمى a جزؤه الحقيقي ويسمى b جزؤه التخيلي
ويرمز الى مجموعة الاعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$
ويقال للصيغة $a+bi$ الصيغة العادية او الجبرية للعدد المركب.

توضيح للتعريف

عدد مركب $\Leftarrow$ $c=a+bi$

a ← الجزء الحقيقي ، b ← الجزء التخيلي

فالعدد $-2+3i$ عدد مركب
الجزء الحقيقي $=-2$ ، الجزء التخيلي $=3$

والعدد -2 عدد مركب $-2+0i$
الجزء الحقيقي $=-2$ ، الجزء التخيلي $=0$

والعدد $-3i$ عدد مركب $0-3i$
الجزء الحقيقي $=0$ ، الجزء التخيلي $=-3$

س ④ اكتب الأعداد على صورة $a+bi$:

ⓐ $-5 = -5+0i$

ⓑ $\sqrt{-100} = \sqrt{100} \times \sqrt{-1} = 10i$
$= 0 + 10i$

ⓒ $-1-\sqrt{-3} = -1 - \sqrt{3} \times \sqrt{-1}$
$= -1 - \sqrt{3}\, i$

مم

ⓓ $\dfrac{1+\sqrt{-25}}{4} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{-25}}{4} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{25} \times \sqrt{-1}}{4}$
$= \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{4} i$

س ④ اكتب الأعداد على صورة $a+bi$:
واجب

ⓐ $-3i$

ⓑ $\sqrt{-144}$

ⓒ $-2+\sqrt{-4}$

ⓓ $\dfrac{3+\sqrt{-9}}{6}$

تعريف ②

تساوي عددين مركبين

اذا كان $C_1 = a_1 + b_1 i \quad , \quad C_2 = a_2 + b_2 i$

$$C_1 = C_2$$

نحصل على

$$a_1 = a_2$$
$$b_1 = b_2$$

س ⑤

جد قيمة كل من x, y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة في كل مما يأتي

ⓐ $2x - 1 + 2i = 1 + (y+1)i$

الحل :-

$2x - 1 = 1$	$y + 1 = 2$
$2x = 1 + 1$	$y = 2 - 1$
$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{2}{2} \Rightarrow x = 1$	$y = 1$

ⓑ $3x + 4i = 2 + 8yi$

$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{2}{3}$	$\frac{\cancel{8}y}{\cancel{8}} = \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{2}}$
$x = \frac{2}{3}$	$y = \frac{1}{2}$

Ⓒ $(2y+1)-(2x-1)i = -8+3i$

$2y+1=-8$

$2y=-8-1$

$\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}}=\frac{-9}{2}$

$y=\frac{-9}{2}$

$-(2x-1)=3 \quad].-1$

$2x-1=-3$

$2x=-3+1$

$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=\frac{-2}{2} \Rightarrow x=-1$

س⑤ جد قيمة $x,y\in R$
واجب

ⓐ $3x+4-5yi=-8+10i$

$x=-4 \ , \ y=-2$

ⓑ $(3x+2)+6i = 8+(y-1)i$

$x=2 \ , \ y=7$

* العمليات على مجموعة الاعداد المركبة *

اولاً : عملية الجمع على مجموعة الاعداد المركبة :

ليكن $C_1 = a_1 + b_1 i$
$C_2 = a_2 + b_2 i$

فأن $C_1 + C_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$

س⑥ جد مجموع العددين المركبين في كل مما يأتي :

ⓐ $3+4\sqrt{2}i \quad , \quad 5-2\sqrt{2}i$

$3+4\sqrt{2}i + 5-2\sqrt{2}i = 8+2\sqrt{2}i$

ⓑ $3 \quad , \quad 2-5i$

$3+0i+2-5i = 5-5i$

ⓒ $1-i \quad , \quad 3i$

$1-i+0+3i = 1+2i$

ⓓ $-2+i \quad , \quad 5-3i$ واجب ⇐

ملاحظة !! اذا كان العدد المركب $C=a+bi$
فأن نظيره الجمعي $-C=-a-bi$

فمثلاً العدد المركب $C=3+4i \Longleftarrow -C=-3-4i$

و العدد المركب $C=-2+5i \Longleftarrow -C=2-5i$

ثانياً: عملية الطرح في مجموعة الاعداد المركبة :

ملاحظة !! طرح اي عدد مركب من اخر يساوي حاصل جمع العدد المركب الاول مع النظير الجمعي للعدد المركب الثاني.

س ⑦ جد ناتج $(7-13i)-(9+4i)$

الحل :-

$$=(7-13i)+(-9-4i)$$

$$=-2-17i$$

س ⑦ واجب جد ناتج $(4+5i)-(2+7i)$

الجواب $= 2-2i$

س⑧ حل المعادلة $(2-4i)+x=-5+i$ حيث $x \in \mathbb{C}$

الحل :-

$$x=(-5+i)-(2-4i)$$

$$x=(-5+i)+(-2+4i)$$

$$x=-7+5i$$

س⑧ حل المعادلة $(2+7i)+y=4+5i$ حيث $y \in \mathbb{C}$
واجب

الجواب $2-2i$

$i^2=-1$

ثالثاً: عملية الضرب على مجموعة الاعداد المركبة:

س⑨ جد ناتج كلاً مما يأتي

ⓐ $(2-3i)(3-5i) = 6-10i-9i+15i^2$

$= 6-10i-9i-15$

$= -9-19i$

ⓑ $(3+4i)^2 = 9+24i+16i^2$

$= 9+24i-16$

$= -7+24i$

ⓒ $i(1+i) = i+i^2$

$= i-1 \qquad = -1+i$

ⓓ $-\frac{5}{2}(4+3i) = -\frac{5}{\cancel{2}_1}\times \cancel{4}^2 - \frac{5}{2}\times 3i$

$= -10-\frac{15}{2}i$

ⓔ $(1+i)^2+(1-i)^2 = (1+2i+i^2)+(1-2i+i^2)$

$= (\cancel{1}+2i-\cancel{1})+(\cancel{1}-2i-\cancel{1})$

$= 2i-2i$

$= 0$

س⑨ جد ناتج كلاً مما يأتي
واجب

ⓐ $(3+2i)(4-5i)$

ⓑ $(1+2i)^2$

ⓒ $-i(1-i)$

ⓓ $\frac{3}{2}(6+4i)$

ⓔ $(2+i)^2+(2-i)^2$

$$\left.\begin{array}{l}(1+i)^2 = 2i \\ (1-i)^2 = -2i\end{array}\right\} \text{ تحفظ}$$

$$(1+i)^3 = (1+i)^2(1+i)$$
$$= 2i(1+i) = 2i + 2i^2 = 2i - 2$$
$$= -2+2i$$

$$(1+i)^4 = [(1+i)^2]^2 = [2i]^2 = 4i^2 = -4$$

$$(1+i)^5 = (1+i)^4(1+i)$$
$$= [(1+i)^2]^2(1+i) = -4(1+i) = -4-4i$$

$$(1+i)^6 = [(1+i)^2]^3 = (2i)^3 = 8i^3$$
$$= 8(-i)$$
$$= -8i$$

وزاري 2012

س ⑩ ضع بالصيغة العاديه للعدد المركب

$(1+i)^4-(1-i)^4$

الحل //

$=[(1+i)^2]^2-[(1-i)^2]^2$

$=[2i]^2-[-2i]^2$

$=4i^2-4i^2$

$=-4+4$

$=0$

وزاري 2012 دور ②

س ⑪ ضع بالصيغة العاديه للعدد المركب

$(1+i)^5-(1-i)^5$

$=(1+i)^4(1+i)-(1-i)^4(1-i)$

$=[(1+i)^2]^2(1+i)-[(1-i)^2]^2(1-i)$

$=(2i)^2(1+i)-(-2i)^2(1-i)$

$=4i^2(1+i)-(4i^2)(1-i)$

$=-4(1+i)+4(1-i)$

$=\cancel{-4}-4i+\cancel{4}-4i \qquad =-8i$

$=0-8i$

س ⑫ ضع المقدار $\frac{(1-i)^{13}}{64}$ بالصيغة العادية للعدد المركب

وزاري 2013 خارج

الحل :-

$$= \frac{(1-i)^{12}(1-i)}{64}$$

$$= \frac{[(1-i)^2]^6 (1-i)}{64}$$

$$= \frac{(-2i)^6 (1-i)}{64}$$

$$= \frac{\cancel{64}\, i^6 (1-i)}{\cancel{64}}$$

$$i^6 = i^{4(1)+2} = i^2$$

$$= -1$$

$$= i^6 (1-i)$$

$$= -1(1-i)$$

$$= -1 + i$$

واجب س ⑫ ضع المقدار $\frac{(1-i)^{23}}{2048}$ بالصيغة العادية للعدد المركب

الجواب $= 1 + i$

* مرافق العدد المركب *

تعريف :

مرافق العدد المركب $c=a+bi$ هو العدد المركب $\bar{c}=a-bi$

$\forall a,b\in R$

العدد المركب c	مرافق العدد المركب $\bar{c}$	النظير الجمعي $-c$	النظير الضربي $\frac{1}{c}$
$3+i$	$3-i$	$-3-i$	$\frac{1}{3+i}$
$5-4i$	$5+4i$	$-5+4i$	$\frac{1}{5-4i}$
i	$-i$	$-i$	$\frac{1}{i}$
7	7	-7	$\frac{1}{7}$

* ضرب عدد مركب في مرافقه

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$

$$(3+4i)(3-4i)=9+16=25$$

$$(2-i)(2+i)=4+1=5$$

$$(5+3i)(5-3i)=$$

الأستاذ : حيدر عبد الائمة
ثانوية زينب الحصر // السادس العلمي

Mathematic

موبايل : 07805330465

س ⑬ اذا كان $c_2 = 3-2i$, $c_1 = 1+i$ فتحقق من :

① $\overline{c_1+c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2}$

الحل :-

$R\text{-}h\text{-}s = \overline{c_1} + \overline{c_2}$

$= \overline{1+i} + \overline{3-2i}$

$= (1-i) + (3+2i)$

$= 4+i$

$L\text{-}h\text{-}s = \overline{c_1+c_2}$

$= \overline{(1+i)+(3-2i)}$

$= \overline{4-i}$

$= 4+i$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر

② $\overline{c_1-c_2} = \overline{c_1} - \overline{c_2}$

الحل :-

$R\text{-}h\text{-}s = \overline{c_1} - \overline{c_2}$

$= \overline{(1+i)} - \overline{(3-2i)}$

$= (1-i) - (3+2i)$

$= (1-i) + (-3-2i)$

$= -2-3i$

$L\text{-}h\text{-}s = \overline{c_1-c_2}$

$= \overline{(1+i)-(3-2i)}$

$= \overline{(1+i)+(-3+2i)}$

$= \overline{-2+3i}$

$= -2-3i$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر

س ⑬ اذا كان $Z_1 = 2+3i$, $Z_2 = 3-5i$ فتحقق من :
واجب

① $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$

② $\overline{Z_1 - Z_2} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2}$

موبايل : 07805330465

س ⑭ اذا كان $C_2 = 3-2i$, $C_1 = 1+i$ فتحقق من ان :

$$\overline{C_1 \times C_2} = \overline{C_1} \times \overline{C_2}$$

$$L.h.S = \overline{C_1 \times C_2}$$
$$= \overline{(1+i) \times (3-2i)}$$
$$= \overline{3-2i+3i-2i^2}$$
$$= \overline{3-2i+3i+2}$$
$$= \overline{5+i}$$
$$= 5-i$$

$$R.h.S = \overline{C_1} \times \overline{C_2}$$
$$= \overline{(1+i)} \times \overline{(3-2i)}$$
$$= (1-i) \times (3+2i)$$
$$= 3+2i-3i-2i^2$$
$$= 3+2i-3i+2$$
$$= 5-i$$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر

س ⑭ واجب اذا كان $x = 8-i$ وكان $y = 2+i$ تحقق من ان :

وزاري 2018 د② ح

$$\overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

س ⑮ جد النظير الضربي للعدد $c = 2 - 2i$ وضعه بالصيغة العادية للعدد المركب

الحل :-

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2-2i} \times \frac{2+2i}{2+2i}$$

$$= \frac{2+2i}{4+4}$$

$$= \frac{2+2i}{8} \qquad = \frac{2}{8} + \frac{2}{8}i$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

س ⑮ واجب جد النظير الضربي للعدد $Z = 1 + 2i$ وضعه بالصيغة العادية للعدد المركب

$$= \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

س ⑯ ضع كلاً مما يأتي بالصورة a+bi :-

ⓐ $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i+i+i^2}{1+1}$

$= \frac{\cancel{1}+2i-\cancel{1}}{\cancel{2}} = i = 0+i$

ⓑ $\frac{2-i}{3+4i} = \frac{+2-i}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{6-8i-3i+4i^2}{9+16}$

$= \frac{6-11i-4}{25} = \frac{2-11i}{25} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i$

ⓒ $\frac{1+2i}{-2+i} = \frac{1+2i}{-2+i} \times \frac{-2-i}{-2-i} = \frac{-2-i-4i-2i^2}{4+1}$

$= \frac{\cancel{-2}-\cancel{5}i+\cancel{2}}{\cancel{5}} = -i = 0-i$

س ⑯ واجب ضع كلاً مما يأتي بالصورة a+bi :-

ⓐ $\frac{5}{2-i}$

ⓑ $\frac{2i}{1+i}$

ⓒ $\frac{2-4i}{3+5i}$

س ⑰ اذا كان $c_1 = 3-2i$ و $c_2 = 1+i$ فتحقق من $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$

الحل :-

$$L\text{-}h\text{-}s = \overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \overline{\left(\frac{3-2i}{1+i}\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{3-2i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}\right)} = \overline{\left(\frac{3-3i-2i+2i^2}{1+1}\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{3-5i-2}{2}\right)} = \overline{\left(\frac{1-5i}{2}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i\right)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$R\text{-}h\text{-}s = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}} = \frac{\overline{3-2i}}{\overline{1+i}}$$

$$= \frac{3+2i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{3+3i+2i+2i^2}{1+1}$$

$$= \frac{3+5i-2}{2} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

س ⑰ اذا كان $c_1 = 7-4i$ ، $c_2 = 2-3i$ فتحقق من ان $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$

وزاري 2014
تمهيدي

س ⑱ اذا كان $\frac{3-2i}{i}$, $\frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان جد قيمة كل من $x,y \in R$

الحل :-

$$\overline{\left(\frac{x-yi}{1+5i}\right)} = \frac{3-2i}{i}$$

$$\frac{x+yi}{1-5i} = \frac{3-2i}{i}$$

$$xi + yi^2 = (1-5i)(3-2i)$$

$$-y + xi = 3 - 2i - 15i + 10i^2$$

$$-y + xi = 3 - 17i - 10$$

$$-y + xi = -7 - 17i$$

$$\cancel{-}y = \cancel{-}7 \Rightarrow y = 7$$

$$x = -17$$

ملاحظة :- لايجاد x,y الحقيقيتين في حالة العددان مترافقان

$\overline{a+bi}$, $a-bi$ مترافقان	$a+bi$, $\overline{a-bi}$ مترافقان
$a-bi = a-bi$	$a+bi = a+bi$

وزاري 2015 دور ③

س ⑲ جد قيمة x ، y الحقيقيتين اذا علمت ان $\frac{6}{x+yi}$ ، $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان

الحل :-

$$\overline{\left(\frac{3+i}{2-i}\right)} = \frac{6}{x+yi}$$

$$\frac{3-i}{2+i} = \frac{6}{x+yi}$$

$$(x+yi)(3-i) = 6(2+i)$$

$$x+yi = \frac{12+6i}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i}$$

$$x+yi = \frac{36+12i+18i+6i^2}{9+1}$$

$$x+yi = \frac{36+30i-6}{10}$$

$$x+yi = \frac{30+30i}{10}$$

$$x+yi = \frac{30}{10} + \frac{30}{10}i$$

$$x+yi = 3+3i \Rightarrow x=3 \ , \ y=3$$

س ⑲ واجب جد قيمة $x,y \in R$ اذا علمت ان $\frac{5}{x+yi}$ ، $\frac{2+i}{3-i}$ مترافقان

$x=5 \ , \ y=5$

موبايل : 07805330465

ملاحظة//
يمكن تحليل x^2+y^2 الى حاصل ضرب عددين مركبين كل منهما من الصورة $a+bi$ وذلك :

$$x^2+y^2 = x^2-y^2i^2 = (x+yi)(x+yi)$$

س 20 حلل كلاً من الاعداد الآتية الى حاصل ضرب عاملين من صورة $a+bi$ حيث b,a اعداد نسبية.

1) $10 = 9+1 = 9-i^2$
$= (3+i)(3-i)$

2) $53 = 49+4 = 49-4i^2$
$= (7+2i)(7-2i)$

3) 41

4) $125 = 121+4 = 121-4i^2$
$= (11+2i)(11-2i)$

5) 29

جدول مساعد

$\sqrt{1} = 1$
$\sqrt{4} = 2$
$\sqrt{9} = 3$
$\sqrt{16} = 4$
$\sqrt{25} = 5$
$\sqrt{36} = 6$
$\sqrt{49} = 7$
$\sqrt{64} = 8$
$\sqrt{81} = 9$
$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{121} = 11$
$\sqrt{144} = 12$
⋮

س (21) جد قيمتي x, y الحقيقيتين واللتين تحققان المعادلة

وزاري 2016 تمهيدي

$$\frac{125}{11+2i}x + (1-i)^2 y = 11$$

الحل :-

$$\frac{121+4}{11+2i}x + (-2i)y = 11$$

$$\frac{121-4i^2}{11+2i}x - 2yi = 11$$

$$\frac{\cancel{(11+2i)}(11-2i)}{\cancel{(11+2i)}}x - 2yi = 11$$

$$11x - 2xi - 2yi = 11 + 0i$$

$$\frac{\cancel{11}x}{\cancel{11}} = \frac{11}{11} \Rightarrow x = 1$$

$$-2x - 2y = 0 \;]\div -2$$

$$x + y = 0$$

$$1 + y = 0 \Rightarrow y = -1$$

وزاري 2016
دور ②

س ㉒ جد قيمتي $x, y \in R$ اذا علمت ان $(x+2i)(x-i) = \frac{121+9y^2}{11+3yi}$

الحل :-

$$x^2 - xi + 2xi - 2i^2 = \frac{121 - 9y^2 i^2}{11+3yi}$$

$$x^2 + xi + 2 = \frac{\cancel{(11+3yi)}(11-3yi)}{\cancel{11+3yi}}$$

$$x^2 + 2 + xi = 11 - 3yi$$

$$x^2 + 2 = 11 \Rightarrow x^2 = 11 - 2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$x = -3y$$

عندما $x = -3$

$$\frac{-3}{-3} = \frac{\cancel{-3}y}{\cancel{-3}} \Rightarrow y = 1$$

عندما $x = 3$

$$\frac{3}{-3} = \frac{\cancel{-3}y}{\cancel{-3}} \Rightarrow y = -1$$

$$S = \{(-3,1), (3,-1)\}$$

وزاري 2003 دور ③

س 23 جد قيمة x, y الحقيقيتين التي تحقق المعادلة $\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+4}{x+2i}$

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2-4i^2}{x+2i}$$

$$\frac{y}{1+i} = \frac{(x+2i)(x-2i)}{(x+2i)}$$

$$y = (1+i)(x-2i)$$

$$y = x-2i+xi-2i^2$$

$$y = x-2i+xi+2$$

$$y = x+2-2i+xi$$

$$y = x+2 \cdots ①$$

$$0 = -2+x \Rightarrow x = 2$$

$$y = 4$$

وزاري 2018 احيائي ت

س 23 واجب
جد قيمة x, y الحقيقيتين التي تحقق المعادلة $\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+9}{x+3i}$

موبايل : 07805330465
ثانوية زينب العصر // السادس العلمي

وزاري 2019 دور ① احيا في

س 24

جد قيمة كلاً من x, y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة:

$$\frac{6}{x+yi}+(2-i)^2=4-3i$$

الحل :-

$$\frac{6}{x+yi}=(4-3i)-(2-i)^2$$

$$\frac{6}{x+yi}=(4-3i)-(4-4i+i^2)$$

$$\frac{6}{x+yi}=(4-3i)-(4-4i-1)$$

$$\frac{6}{x+yi}=(4-3i)-(3-4i)$$

$$\frac{6}{x+yi}=4-3i-3+4i$$

$$\frac{6}{x+yi}=\frac{1+i}{1}$$

$$x+yi=\frac{6}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}$$

$$x+yi=\frac{6(1-i)}{1+1}=\frac{\overset{3}{\cancel{6}}(1-i)}{\cancel{2}}$$

$$x+yi=3-3i$$

$$x=3\ ,\ y=-3$$

وزاري 2009 دور ②

س㉓ اثرائي

جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق $(3x+2yi)^2 = \frac{200}{4+3i}$

الحل :-

$$9x^2 + 12xyi + 4y^2i^2 = \frac{200}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$9x^2 + 12xyi - 4y^2 = \frac{200(4-3i)}{16+9}$$

$$9x^2 - 4y^2 + 12xyi = \frac{\cancel{200}^{8}(4-3i)}{\cancel{25}_{1}}$$

$$9x^2 - 4y^2 + 12xyi = 32 - 24i$$

$$9x^2 - 4y^2 = 32 \quad \cdots ①$$

$$\frac{\cancel{12x}y}{\cancel{12x}} = \frac{-24}{12x} \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \quad \cdots ②$$

$$9x^2 - 4\left(\frac{-2}{x}\right)^2 = 32$$

$$\left. 9x^2 - 4\left(\frac{4}{\cancel{x^2}}\right) = 32 \right] \times x^2$$

$$9x^4 - 16 = 32x^2$$

$$9x^4-32x^2-16=0$$

$$(9x^2+4)(x^2-4)=0$$

اما $9x^2+4=0 \Rightarrow \frac{9}{9}x^2=\frac{-4}{9} \Rightarrow x^2=-\frac{4}{9}$ يهمل

او $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

$x=-2 \Rightarrow y=\frac{-2}{-2} \Rightarrow y=1$

$x=2 \Rightarrow y=\frac{-2}{2} \Rightarrow y=-1$

$$S=\{(-2,1),(2,-1)\}$$

وزاري 2006 تمهيدي

س 29

جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق $(x+i)(y-3i) = -1-13i$

$= \{(\frac{1}{3}, -12), (4, -1)\}$

س 27

جد قيمة $x, y \in R$ التي تحقق المعادلة

$8i = (x+2i)(y+2i)+1$

$-1+8i = (x+2i)(y+2i)$

$-1+8i = xy+2xi+2yi+4i^2$

$-1+8i = xy-4+2xi+2yi$

$xy-4=-1 \Rightarrow xy=-1+4 \Rightarrow \frac{xy}{x} = \frac{3}{x}$

$\Rightarrow y = \frac{3}{x} \quad \cdots ①$

$2x+2y=8 \;]\div 2 \Rightarrow x+y=4 \quad \cdots ②$

$x+\frac{3}{x}=4 \;]\cdot x$

$x^2+3=4x$

$x^2-4x+3=0$

$(x-3)(x-1)=0$

اما $x=3 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (3,1)$ $\Rightarrow S=\{(3,1),(1,3)\}$

او $x=1 \Rightarrow y=3 \Rightarrow (1,3)$

س 27 جد قيمة $x, y \in R$ التي تحقق المعادلة

واجب

$6i = (x+i)(y+i)+1$

الجواب $\Leftarrow$ $S=\{(0,6),(6,0)\}$

س 28 جد قيمة $x,y \in R$ التي تحقق المعادلة

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + (x+yi) = (1+2i)^2$$

الحل :-

$$x+yi = (1+2i)^2 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)$$

$$x+yi = (1+4i+4i^2) - \left[\frac{1-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}\right]$$

$$x+yi = (1+4i-4) - \left(\frac{(1-i)^2}{1+1}\right)$$

$$x+yi = (-3+4i) - \left(\frac{-\cancel{2}i}{\cancel{2}}\right)$$

$$x+yi = -3+4i+i$$

$$x+yi = -3+5i$$

$$x = -3$$

$$y = 5$$

س 28 واجب جد قيمة $x,y \in R$ التي تحقق المعادلة

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 + (2x-yi) = (1+2i)^2$$

الجواب ⇐ $x = -\frac{3}{2}$, $y = -5$

وزاري 2004 , 2005 دور ②

س 25 جد قيمة $x,y \in R$ التي تحقق

$$\frac{2-i}{1+i}x+\frac{3-i}{2+i}y=\frac{1}{i}$$

الحل :-

$$\left(\frac{2-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right)x+\left(\frac{3-i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}\right)y=\frac{-i}{i}$$

$$\left(\frac{2-2i-i+i^2}{2}\right)x+\left(\frac{6-3i-2i+i^2}{5}\right)y=0-i$$

$$\left(\frac{2-3i-1}{2}\right)x+\left(\frac{6-5i-1}{5}\right)y=0-i$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{3i}{2}\right)x+\left(\frac{5}{5}-\frac{5i}{5}\right)y=0-i$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)x+(1-i)y=0-i$$

$$\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}xi+y-yi=0-i$$

بالجمع

$$\frac{1}{2}x+y=0\ ]\times 2 \Rightarrow x+\cancel{2y}=0 \quad \cdots ①$$

$$-\frac{3}{2}x-y=-1\ ]\times 2 \Rightarrow -3x-\cancel{2y}=-2 \quad \cdots ②$$

$$\frac{-2x}{-2}=\frac{-2}{-2}$$

$$x=1$$

$$1+2y=0 \Rightarrow \frac{2y}{2}=\frac{-1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

وزاري 2010 تمهيدي

س 30 اذا كان $a+bi=\frac{2+i}{1-i}$ اثبت ان $2(a^3+b^3)=7$

الحل :-

$$a+bi=\frac{2+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}$$

$$a+bi=\frac{2+2i+i+i^2}{2}$$

$$a+bi=\frac{1+3i}{2}$$

$$a+bi=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i \Rightarrow a=\frac{1}{2}\ ,\ b=\frac{3}{2}$$

$$\therefore 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]=2\left[\frac{1}{8}+\frac{27}{8}\right]$$

$$=\cancel{2}\times\frac{28}{\cancel{8}4}$$

$$=7$$

و.هـ.م

س ③1 اثبت ان :

$$\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{8}{25}i$$

الطرف الايسر $= \dfrac{1}{(2-i)^2}-\dfrac{1}{(2+i)^2}$

$$=\frac{1}{4-4i+i^2}-\frac{1}{4+4i+i^2}$$

$$=\frac{1}{3-4i}\times\frac{3+4i}{3+4i}-\frac{1}{3+4i}\times\frac{3-4i}{3-4i}$$

$$=\frac{3+4i}{9+16}-\frac{3-4i}{9+16}$$

$$=\frac{3+4i}{25}-\frac{3-4i}{25}$$

$$=\frac{3+4i-(3-4i)}{25}$$

$$=\frac{\cancel{3}+4i-\cancel{3}+4i}{25}$$

$= \dfrac{8}{25}i =$ الطرف الايمن

وزاري 2017 دور ①

س 31 اثبت ان:
واجب

$$\frac{1}{(1+2i)^2}+\frac{1}{(1-2i)^2}=\frac{-6}{25}$$

س 32 اثبت ان

$$\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = -2$$

الطرف الايسر $= \frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i}$

$$= \frac{-2i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} + \frac{2i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}$$

$$= \frac{-\cancel{2}i(1-i)}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}i(1+i)}{\cancel{2}}$$

$$= \cancel{-i} + i^2 + \cancel{i} + i^2$$

$$= -1 - 1$$

$= -2 =$ الطرف الايمن

س 33 اثبت ان :

$$(1-i)(1-i^2)(1-i^3) = 4$$

الطرف الايسر $= (1-i)(1-i^2)(1-i^3)$

$$= (1-i)(1+1)(1+i)$$

$$= 2(1-i)(1+i)$$

$$= 2(2)$$

$= 4 =$ الطرف الايمن

س ③④

اثبت ان $(1-i)^6 = 8i$

الحل : الطرف الايسر $= (1-i)^6$

$= \left[(1-i)^2\right]^3$

$= \left[-2i\right]^3 = -8i^3$

$= -8(-i)$

$= 8i =$ الطرف الايمن

* الجذور التربيعيه للعدد المركب

درسنا سابقاً انه اذا كان a عدداً حقيقاً موجباً فانه يوجد له جذران تربيعيان $\pm\sqrt{a}$ تحقق كل منهما المعادله $x^2=a$

اما اذا كان $a=0$ فان له جذر واحد هو 0

الان سنتناول دراسة الجذور التربيعيه للعدد المركب :

هناك نوعان من الاسئله حول ايجاد الجذور التربيعيه للاعداد المركبه:

① النوع الاول "عدد مركب مكون من جزء حقيقي فقط"

طريقة الحل ⇐ $c^2=a \Rightarrow c=\pm\sqrt{a}$

---

② النوع الثاني "عدد مركب مكون من جزء حقيقي وجزء تخيلي او مكون من جزء تخيلي فقط"

طريقة الحل ⇐ ① نفرض ان $x+yi=\sqrt{a+bi}$

② بتربيع الطرفين نحصل على ⇐ $(x+yi)^2=a+bi$

③ بعد التبسيط ⇐ $x^2-y^2+2xyi=a+bi$

④ نكمل كما في ايجاد قيم x, y

$x^2-y^2=a$

$2xy=b$

أسئلة خاصة بالنوع الأول

س ①
جد الجذور التربيعية للاعداد

ⓐ -25

$$c^2 = -25$$
$$c = \pm\sqrt{-25} = \pm\sqrt{25}\times\sqrt{-1} = \pm 5i$$

ⓑ -17

$$c^2 = -17$$
$$c = \pm\sqrt{-17} = \pm\sqrt{17}\times\sqrt{-1} = \pm\sqrt{17}\,i$$

ⓒ -36

ⓓ -12

اسئله خاصه بالنوع الثاني

س② جد الجذور التربيعيه للعدد $c = 8+6i$

الحل :-

تربيع الطرفين $x+yi = \sqrt{8+6i}$

$(x+yi)^2 = 8+6i$

$x^2-y^2+2xyi = 8+6i$

$x^2-y^2 = 8 \quad \cdots ①$

$\frac{\cancel{2x}y}{\cancel{2x}} = \frac{\cancel{6}^{3}}{2x} \Rightarrow y = \frac{3}{x} \quad \cdots ②$

نعوض ② في ①

نحصل على ⇐

$x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 8$

$x^2 - \frac{9}{x^2} = 8 \;] \cdot x^2$

$x^4 - 9 = 8x^2$

$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

$(x^2-9)(x^2+1) = 0 \Rightarrow$ اما $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$ يهمل

او $x^2-9=0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$x = -3 \Rightarrow y = -1$

$x = 3 \Rightarrow y = 1$

الجذور التربيعيه $c_1 = -3-i \quad , \quad c_2 = 3+i$

س 3

جد الجذور التربيعية للعدد $c = 7+24i$

$c_1 = 4+3i \quad , \quad c_2 = -4-3i$

س④ جد الجذور التربيعية للعدد $c = -6i$

$c = 0 - 6i$

بتربيع الطرفين

$x + yi = \sqrt{0 - 6i}$

$(x + yi)^2 = 0 - 6i$

$x^2 - y^2 + 2xyi = 0 - 6i$

$x^2 - y^2 = 0 \quad \ldots ①$

$\frac{\cancel{2x}y}{\cancel{2x}} = \frac{-6}{2x} \Rightarrow y = \frac{-3}{x} \quad \ldots ②$

نعوض المعادلة ② في ①

$x^2 - \left(\frac{-3}{x}\right)^2 = 0$

$x^2 - \frac{9}{x^2} = 0 \;] \cdot x^2$

$x^4 - 9 = 0$

$(x^2 + 3)(x^2 - 3) = 0$

اما $x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3$ يهمل

او $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$y = \frac{-3}{\pm\sqrt{3}} = \mp\frac{\sqrt{3} \times \cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}} \Rightarrow y = \mp\sqrt{3}$

الجذور التربيعية

$c_1 = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$

$c_2 = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$

س5

جد الجذور التربيعية للعدد $c = 8i$

$c_1 = 2+2i \quad c_2 = -2-2i$

س⑥ جد الجذور التربيعية للعدد $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

$$C=\frac{4}{1-\sqrt{3}i}\times\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

$$C=\frac{4(1+\sqrt{3}i)}{1+3}=\frac{\cancel{4}(1+\sqrt{3}i)}{\cancel{4}}$$

$C=1+\sqrt{3}i \Leftarrow$ الصيغه العاديه

$x+yi=\sqrt{1+\sqrt{3}i}$ تربيع الطرفين

$$(x+yi)^2=1+\sqrt{3}i$$

$$x^2-y^2+2xyi=1+\sqrt{3}i$$

$$x^2-y^2=1 \quad \ldots ①$$

$$\frac{\cancel{2x}y}{\cancel{2x}}=\frac{\sqrt{3}}{2x} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2x} \quad \ldots ②$$

$$x^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2x}\right)^2=1$$

$$x^2-\frac{3}{4x^2}=1 \Big] \cdot 4x^2$$

$$4x^4-3=4x^2$$

$$4x^4-4x^2-3=0$$

$$(2x^2-3)(2x^2+1)=0$$

اما $2x^2+1=0 \Rightarrow \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}=\frac{-1}{2} \Rightarrow x^2=-\frac{1}{2}$ يهمل

او $2x^2-3=0 \Rightarrow \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}=\frac{3}{2} \Rightarrow x^2=\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2x} \quad \dots (2)$$

$$y=\frac{1\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}\left(\pm\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)} \Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ c_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i \end{aligned}\right\}$$ الجذور التربيعية

وزاري 2009 دور ②

س⑦ جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $\frac{14+2i}{1+i}$

$C_1 = -3+i \quad , \quad C_2 = 3-i$

وزاري 2019 دور① خارج

س⑧ اذا كانت $a+ib=\frac{7-4i}{2+i}$, $a,b\in R$ جد قيمة $\sqrt{2a-ib}$

الحل :-

$$a+bi=\frac{7-4i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}$$

$$a+bi=\frac{14-7i-8i+4i^2}{4+1}$$

$$a+bi=\frac{14-15i-4}{5}$$

$$a+bi=\frac{10}{5}-\frac{15i}{5}$$

$$a+bi=2-3i \Rightarrow a=2\ ,\ b=-3$$

$$\sqrt{2(2)-i(-3)}$$

$$x+yi=\sqrt{4+3i}$$ بتربيع الطرفين

$$(x+yi)^2=4+3i$$

$$x^2-y^2+2xyi=4+3i$$

$$x^2-y^2=4 \ldots ①$$

$$\frac{2xy}{2x}=\frac{3}{2x}$$

$$y = \frac{3}{2x} \cdots (2)$$

نعوض المعادلة (2) في (1)

$$x^2 - \left(\frac{3}{2x}\right)^2 = 4$$

$$x^2 - \frac{9}{4x^2} = 4 \Big] \cdot 4x^2$$

$$4x^4 - 9 = 16x^2$$

$$4x^4 - 16x^2 - 9 = 0$$

$$(2x^2 - 9)(2x^2 + 1) = 0$$

اما $2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} = \frac{-1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{-1}{2}$ يهمل

او $2x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$

$$y = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}\left(\pm\frac{\cancel{3}}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

الجذور التربيعية

$$c_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

$$c_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

س① حل المعادلة $x^2+4x+5=0$ في مجموعة الاعداد المركبه.

الحل :-

$a=1 \,,\; b=4 \,,\; c=5$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4(1)(5)}}{2}$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{4}\,i}{2}=\frac{-4}{2}\pm\frac{2i}{2}$$

$$x=-2\pm i \qquad S=\{-2+i\,,\,-2-i\}$$

س② حل المعادلة $x^2-6x=-13$ في مجموعة الاعداد المركبه

واجب

س③ حل المعادلة $2Z^2-5Z+13=0$ وهل جذراها مترافقان؟

الحل :- $a=2, b=-5, c=13$

$$Z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$Z=\frac{5\pm\sqrt{25-4(2)(13)}}{4}$$

$$Z=\frac{5\pm\sqrt{25-104}}{4}$$

$$Z=\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{-79}}{4}$$

$$Z=\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{79}\,i}{4}$$

$$S=\left\{\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{79}}{4}i\ ,\ \frac{5}{4}-\frac{\sqrt{79}}{4}i\right\}$$

جذراها مترافقان

س④ حل المعادلة $4Z^2+25=0$ وهل جذراها مترافقان؟

الحل :-

$$4Z^2-25i^2=0$$

$$(2Z+5i)(2Z-5i)=0$$

اما $2Z+5i=0 \Rightarrow \frac{2Z}{2}=\frac{-5i}{2}$

$$Z=-\frac{5}{2}i$$

او $2Z-5i=0 \Rightarrow \frac{2Z}{2}=\frac{5i}{2}$

$$Z=\frac{5}{2}i$$

$$S=\left\{-\frac{5}{2}i\ ,\ \frac{5}{2}i\right\}$$

جذراها مترافقان

س⑥ حل المعادلة $Z^2-2iZ+3=0$

$Z^2-2iZ-3i^2=0$

$(Z-3i)(Z+i)=0$

اما $Z-3i=0 \Rightarrow Z=3i$

او $Z+i=0 \Rightarrow Z=-i$

$S=\{3i \text{ و } -i\}$ جذراها غير مترافقان

س⑦ وزاري 2017 دور② احيائي

حل المعادلة في $\mathbb{C}$ ، $Z^2+2i(3-2i)=3Z$

الحل :-

$Z^2-3Z+2i(3-2i)=0$

$[Z-2i][Z-(3-2i)]=0$

اما $Z-2i=0 \Rightarrow Z=2i$

او $Z-(3-2i)=0 \Rightarrow Z=3-2i$

$S=\{2i, 3-2i\}$

جذراها غير مترافقان

الأستاذ : حيدر عبد الائمة
مدارس المنصور الاهلية // السادس العلمي
الفصل الاول // الاعداد المركبة
موبايل : 07805330465

Mathematic

س⑤ حل المعادلة $z^2-3z+3+i=0$ وهل جذرها مترافقان

الحل :-

$a=1\ ,\ b=-3\ ,\ c=3+i$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{9-4(1)(3+i)}}{2}$$

$$z=\frac{3\pm\sqrt{9-12-4i}}{2}$$

$$z=\frac{3\pm\sqrt{-3-4i}}{2}\ \cdots (*)$$

$x+yi=\sqrt{-3-4i}$ بتربيع الطرفين

$$(x+yi)^2=-3-4i$$

$$x^2-y^2+2xyi=-3-4i$$

$$x^2-y^2=-3\ \cdots ①$$

$$\frac{2xy}{2x}=\frac{-4}{2x}$$

$$y=\frac{-4}{2x}\Rightarrow y=\frac{-2}{x}\ \cdots ②$$

نعوض ② في ①

$$x^2-\left(\frac{-2}{x}\right)^2=-3$$

$$x^2-\frac{4}{x^2}=-3\Big]\cdot x^2$$

$$x^4-4=-3x^2$$

$$x^4+3x^2-4=0$$

$$(x^2+4)(x^2-1)=0$$

اما $x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4$ يهمل

او $x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$$y=\frac{-2}{\pm 1} \Rightarrow y=\mp 2$$

$$c_1=1-2i \qquad c_2=-1+2i$$

نعوض $c_1=1-2i$ في المعادله ⊛

$$Z=\frac{3\pm(1-2i)}{2}$$

$$S=\begin{cases}\dfrac{3+(1-2i)}{2}=\dfrac{4}{2}-\dfrac{2i}{2}=2-i\\[2ex]\dfrac{3-(1-2i)}{2}=\dfrac{2}{2}+\dfrac{2i}{2}=1+i\end{cases}$$

* تكوين المعادلة التربيعيه اذا علم جذراها :-

① نجعل جذري المعادلة بالصيغه العاديه للعدد المركب $a+bi$.

② نجد مجموع الجذرين و حاصل ضرب الجذرين

③ نطبق القانون التالي :-

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$$

س① جد المعادلة التربيعيه التي جذراها :

$m = -2+i \quad , \quad L = -2-i$

الحل :-

مجموع الجذرين

$$m + L = (-2+\cancel{i}) + (-2-\cancel{i}) = -4$$

$$m \cdot L = (-2+i)(-2-i)$$

$$= 4 + \cancel{2i} - \cancel{2i} - i^2$$

حاصل ضرب الجذرين

$$= 4 + 1 = 5$$

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$$

المعادلة التربيعيه

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

س② كون المعادلة التربيعيه التي جذراها M, L حيث:

$M = 1+2i$, $L = 1-i$

مجموع الجذرين $M+L = (1+2i)+(1-i) = 2+i$

$M \cdot L = (1+2i)(1-i)$

$= 1-i+2i-2i^2$

حاصل ضرب الجذرين $= 1+i+2 = 3+i$

$x^2 - ($ مجموع الجذرين $)x + ($ حاصل ضرب الجذرين $) = 0$

$x^2 - (2+i)x + (3+i) = 0$

س③ كون المعادلة التربيعيه التي جذراها M, L حيث:
$M = 2+3i$, $L = 2-3i$

س④ كون المعادلة التربيعيه التي جذراها L, M حيث

$$M = \frac{3-i}{1+i} \quad , \quad L = (3-2i)^2$$

$$M = \frac{3-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{3-3i-i+i^2}{1+1}$$

$$M = \frac{3-4i-1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{4i}{2} = 1-2i$$

$$L = (3-2i)^2 = 9-12i+4i^2 = 9-12i-4$$

$$L = 5-12i$$

مجموع الجذرين

$$M+L = (1-2i)+(5-12i) = 6-14i$$

$$M \cdot L = (1-2i)(5-12i)$$

$$= 5-12i-10i+24i^2$$

حاصل ضرب الجذرين

$$= 5-22i-24 = -19-22i$$

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$$

$$x^2 - (6-14i)x + (-19-22i) = 0$$

س⑤ كون المعادلة التربيعية التي جذراها M, L حيث:

$$M = \frac{5+5i}{1+3i} \quad , \quad L = \frac{9+2i}{4-i}$$

المعادله التربيعيه $\Leftarrow x^2 - 4x + 5 = 0$

ملاحظة مهمة // اذا طلب في السؤال كون المعادلة التربيعيه ذات المعاملات الحقيقية

⇐ نحصل على ان جذري المعادلة مترافقان

فاذا كان الجذر الاول $M = x + yi$

فأن الجذر الثاني $L = x - yi$

س⑥ كون المعادلة التربيعيه التي معاملاتها حقيقيه وواحد جذريها $3-4i$

الحل :-

$m = 3-4i$

$L = 3+4i$

مجموع الجذرين $m + L = (3-\cancel{4i}) + (3+\cancel{4i}) = 6$

حاصل ضرب الجذرين $m \cdot L = (3-4i)(3+4i) = 9+16 = 25$

$x^2 - ($ مجموع الجذرين $)x + ($ حاصل ضرب الجذرين $) = 0$

المعادلة التربيعيه $x^2 - 6x + 25 = 0$

س⑦ كون المعادلة التربيعيه ذات المعاملات الحقيقيه وواحد جذريها $5-i$

س ⑧ كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية واحد جذريها i

$m = i$
$L = -i$

الحل :-

مجموع الجذرين $m + L = (i) + (-i) = 0$

حاصل ضرب الجذرين $m \cdot L = (i)(-i) = -i^2 = 1$

$x^2 - ($مجموع الجذرين$)x + ($حاصل ضرب الجذرين$) = 0$

$x^2 - \cancel{(0)x} + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$

س ⑨ كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية واحد جذريها $\frac{\sqrt{2}+3i}{4}$

$m = \frac{\sqrt{2}+3i}{4} \quad , \quad L = \frac{\sqrt{2}-3i}{4}$

$m + L = \frac{\sqrt{2}+\cancel{3i}}{4} + \frac{\sqrt{2}-\cancel{3i}}{4} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{4}2} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}}$

$m + L = \frac{1}{\sqrt{2}}$ مجموع الجذرين

$m \cdot L = \frac{\sqrt{2}+3i}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}-3i}{4} = \frac{2+9}{16} = \frac{11}{16}$

$x^2 - ($مجموع الجذرين$)x + ($حاصل ضرب الجذرين$) = 0$

$x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{11}{16} = 0$

وزاري 2018 دور ③
احيائي

س⑩ كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية واحد جذريها $(\sqrt{3}-i)^2$

$$M = (\sqrt{3}-i)^2 = 3 - 2\sqrt{3}i + i^2$$

$$M = 3 - 2\sqrt{3}i - 1 \Rightarrow M = 2 - 2\sqrt{3}i$$

$$L = 2 + 2\sqrt{3}i$$

جذراها مترافقان

مجموع الجذرين $M + L = (2 - \cancel{2\sqrt{3}i}) + (2 + \cancel{2\sqrt{3}i}) = 4$

$$M \cdot L = (2 - 2\sqrt{3}i)(2 + 2\sqrt{3}i) = 4 + 12$$

حاصل ضرب الجذرين $= 16$

$x^2 - ($ مجموع الجذرين $)x + ($ حاصل ضرب الجذرين $) = 0$

المعادلة التربيعية $x^2 - 4x + 16 = 0$

س⑪ كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية واحد جذريها $\frac{12+i}{i}$

المعادلة التربيعية $\Rightarrow x^2 - 2x + 145 = 0$

ملاحظات مهمه جدا" || * لايجاد الثوابت في المعادلة التربيعيه نجعل المعادله بالشكل الآتي

$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

س (12) وزاري 2011 دور (1)

اذا كان $3+i$ هو احد جذري المعادلة $x^2 - ax + (5+5i) = 0$ فما قيمة $a \in \mathbb{C}$ ؟ وماهو الجذر الاخر ؟

الحل :-

$m = 3+i$ الجذر الاول

$L = ?$ الجذر الثاني

$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

$x^2 - ax + (5+5i) = 0$

$m \cdot L = (5+5i)$

$(3+i)L = (5+5i) \Rightarrow L = \frac{5+5i}{3+i} \times \frac{3-i}{3-i}$

$L = \frac{15-5i+15i-5i^2}{9+1} = \frac{15+10i+5}{10} = \frac{20}{10} + \frac{10}{10}i$

$L = 2+i$ الجذر الثاني

$\therefore a = m + L$

$a = (3+i) + (2+i)$

$a = 5+2i$ مجموع الجذرين

وزاري 2019 دور② احيائي

س⑬ اذا كان $(3-4i)$ هو احد جذري المعادلة التربيعية $x^2-nx+10-5i=0$ ، فما الجذر الثاني ؟ وما قيمة (n) ؟

الحل :- الجذر الاول $M=3-4i$

الجذر الثاني $L=?$

$$x^2-(\text{مجموع الجذرين})x+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$$

$$x^2-nx+(10-5i)=0$$

حاصل ضرب الجذرين $M\cdot L=10-5i$

$$(3-4i)\cdot L=10-5i$$

$$L=\frac{10-5i}{3-4i}\times\frac{3+4i}{3+4i}=\frac{30+40i-15i-20i^2}{9+16}$$

$$L=\frac{30+25i+20}{25}=\frac{50}{25}+\frac{25i}{25}$$

الجذر الثاني $L=2+i$

$$n=M+L$$

$$n=(3-4i)+(2+i)$$

مجموع الجذرين $n=5-3i$

وزاري 2017 دور 2 موصل

س 14

اذا كان $(1+2i)$ هو احد جذري المعادلة $x^2-(3-i)x+a=0$
فما جذرها الثاني , وما قيمة a ؟

الحل :- $m=1+2i$ الجذر الثاني $L=?$

$x^2-($ مجموع الجذرين $)x+($ حاصل ضرب الجذرين $)=0$

$x^2-(3-i)x+a=0$

$m+L=3-i$	$a=m\cdot L$
$(1+2i)+L=3-i$	$a=(1+2i)(2-3i)$
$L=(3-i)-(1+2i)$	$a=2-3i+4i-6i^2$
$L=3-i-1-2i$	$a=2+i+6$
$L=2-3i$	$a=8+i$ حاصل ضرب الجذرين

واجب

س 15

اذا كان $(3+i)$ هو احد جذري المعادلة $x^2-nx+16+2i=0$
فما جذرها الاخر , وما قيمة n

* النوع الثاني // غير المباشر

يجب قبل البدء بالحل جعل المعادلة بالصورة :

$x^2 -$ (مجموع الجذرين) x + (حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

مع العلم اذا ذكر في السؤال معاملاتها حقيقية ⇐ جذرها مترافقان

س 16 وزاري 2015 دور 2

اذا كان $2-4i$ هو احد جذري المعادلة $2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$ معاملاتها حقيقية جد قيمتي $b, c \in R$

الحل :-

$$\left.\begin{aligned} m &= 2-4i \\ L &= 2+4i \end{aligned}\right\}$$ معاملاتها حقيقية

$$2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$$

$$\frac{2x^2}{2} - \frac{(1+b)}{2}x + \frac{(c-6)}{2} = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{1+b}{2}\right)x + \left(\frac{c-6}{2}\right) = 0$$

$$m + L = \frac{1+b}{2}$$

$$(2-\cancel{4i}) + (2+\cancel{4i}) = \frac{1+b}{2}$$

$$\frac{4}{1} = \frac{1+b}{2} \Rightarrow 1+b = 8$$

$$b = 8-1$$

$$b = 7$$

$$m.L = \frac{c-6}{2}$$

$$(2-4i)(2+4i) = \frac{c-6}{2}$$

$$4+16 = \frac{c-6}{2}$$

$$\frac{20}{1} \times \frac{c-6}{2} \Rightarrow c-6 = 40 \Rightarrow c = 46$$

س 17 اذا كان $(1-2i)$ هو احد جذري المعادلة $2x^2-2x-bx+a-7=0$ معاملاتها حقيقيه جد $a, b \in R$

$a = 17 \ , \ b = 2$

وزاري 2018 دور 2 خارج

س 18 اذا كان احد جذري المعادلة التربيعية $x^2+x-bx+c+8=0$ هو $(1-3i)$ جد قيمة b,c الحقيقيتين.

الحل //

$\left.\begin{matrix} m=1-3i \\ L=1+3i \end{matrix}\right\}$ المعاملات حقيقيه

$$x^2+x-bx+c+8=0$$

$$x^2-\underbrace{(-1+b)}_{\text{مجموع الجذرين}}x+\underbrace{(c+8)}_{\text{حاصل ضرب الجذرين}}=0$$

$$m+L=-1+b$$

$$(1-\cancel{3i})+(1+\cancel{3i})=-1+b$$

$$2+1=b \Rightarrow b=3$$

$$m.L=c+8$$

$$(1-3i)(1+3i)=c+8$$

$$1+9=c+8$$

$$10-8=c \Rightarrow c=2$$

وزاري مهم جداً

س 19

اذا كان احد جذري المعادلة $x^2-12x-16ix+c=0$ هو ثلاثة امثال الاخر جد قيمة c.

الحل :-

نفرض الجذر الاول $= m$ ، الجذر الثاني $= L$

$$m=3L$$

$$x^2-(\text{مجموع الجذرين})x+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$$

$$x^2-(12+16i)x+c=0$$

$$m+L=12+16i$$

$$3L+L=12+16i$$

$$\frac{4L}{4}=\frac{12}{4}+\frac{16i}{4} \Rightarrow L=3+4i$$ الجذر الثاني

$$m=3(3+4i) \Rightarrow m=9+12i$$ الجذر الاول

$$c=m.L$$ حاصل ضرب الجذرين

$$c=(9+12i)(3+4i)$$

$$c=27+36i+36i+48i^2$$

$$c=27+72i-48 \Rightarrow c=-21+72i$$

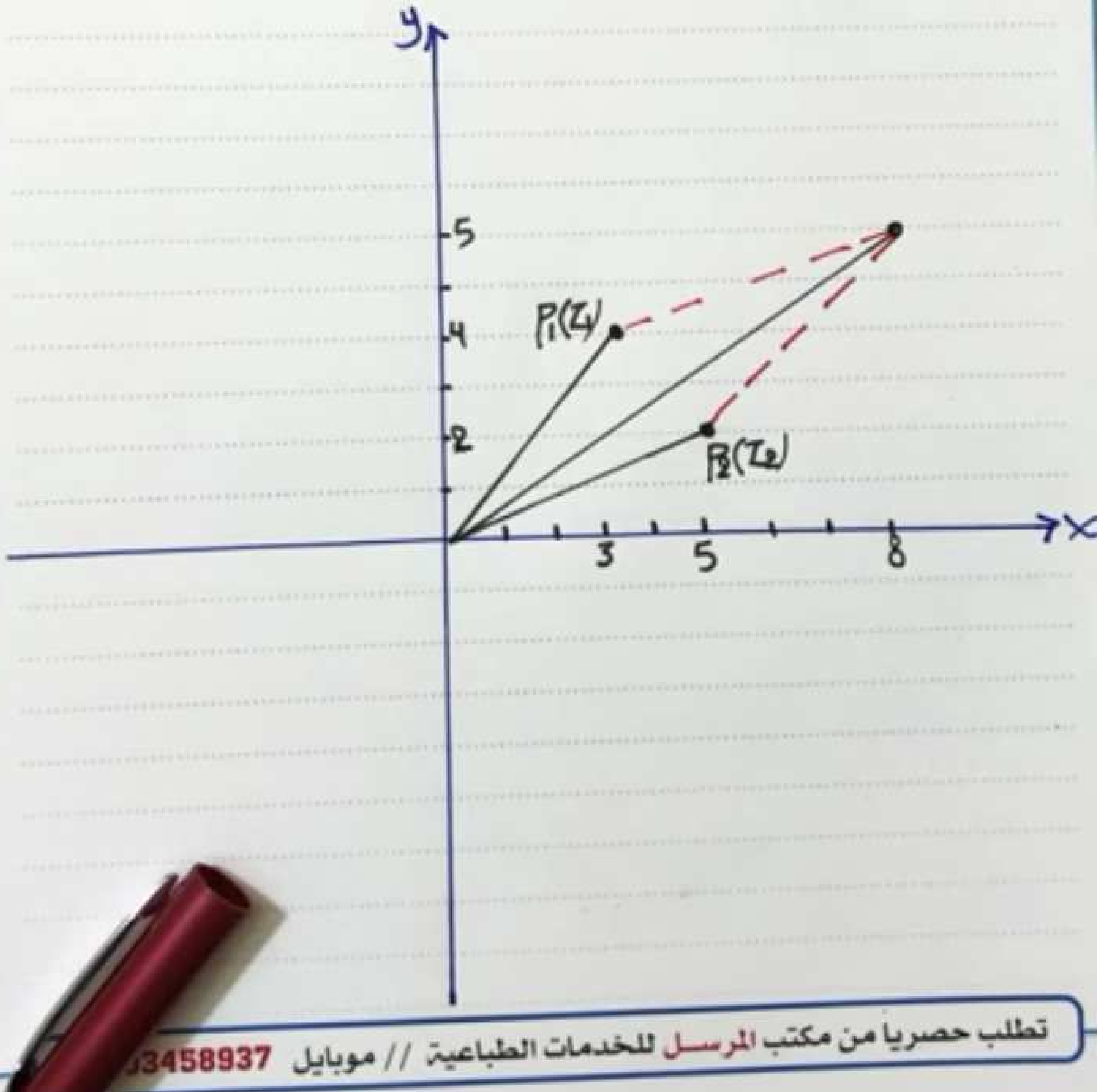
س ① مثل العمليات الاتية هندسياً في شكل ارجاند :

ⓐ $(3+4i)+(5+2i)=8+6i$ وزاري

$Z_1=3+4i \Rightarrow P_1(Z_1)=(3,4)$

$Z_2=5+2i \Rightarrow P_2(Z_2)=(5,2)$

$Z_3=8+6i \Rightarrow P_3(Z_3)=(8,6)$

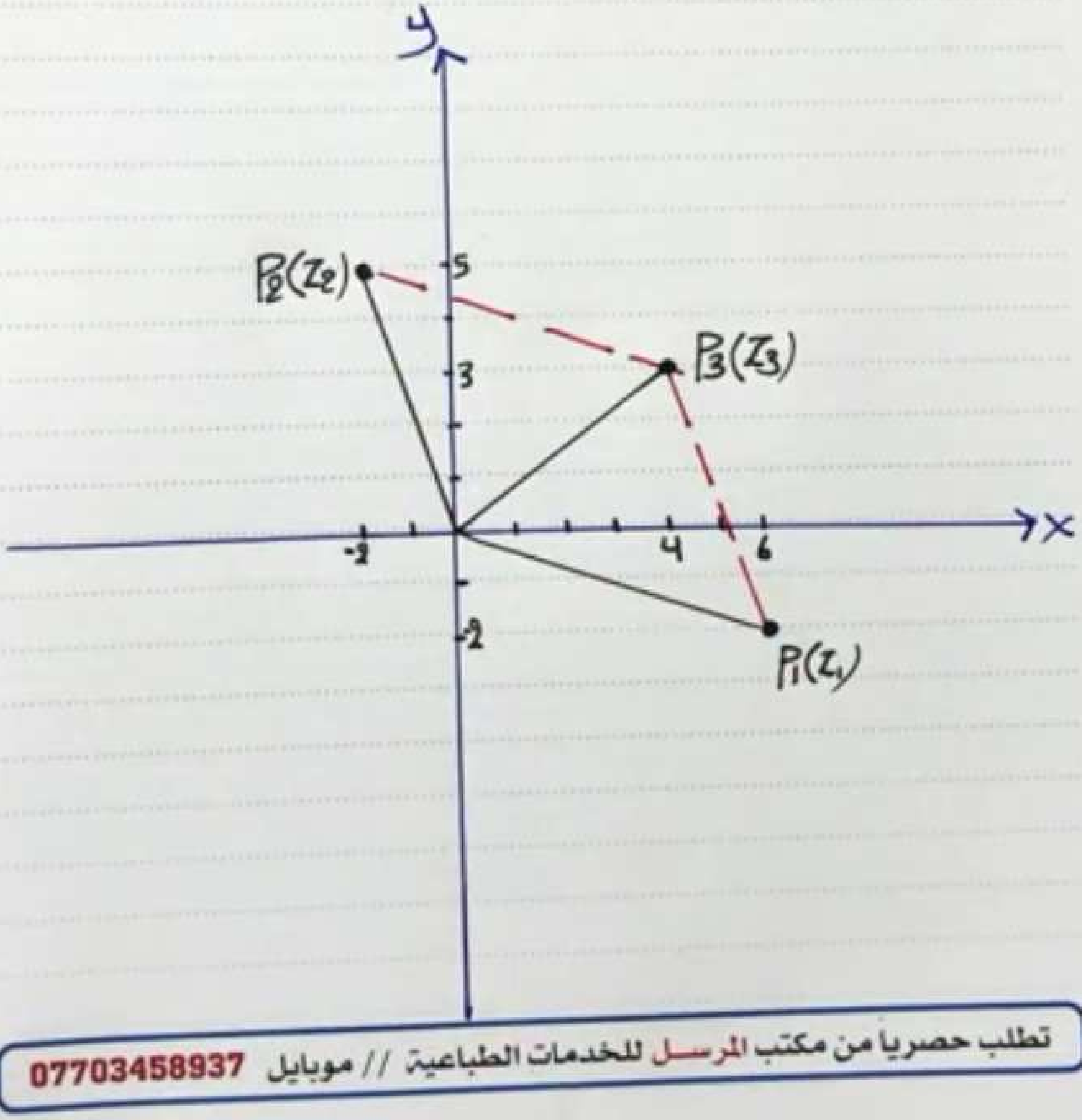


(b) $(6-2i)-(2-5i) = (6-2i)+(-2+5i) = 4+3i$

$z_1 = 6-2i \Rightarrow P_1(z_1) = (6,-2)$

$z_2 = -2+5i \Rightarrow P_2(z_2) = (-2,5)$

$z_3 = 4+3i \Rightarrow P_3(z_3) = (4,3)$



س③

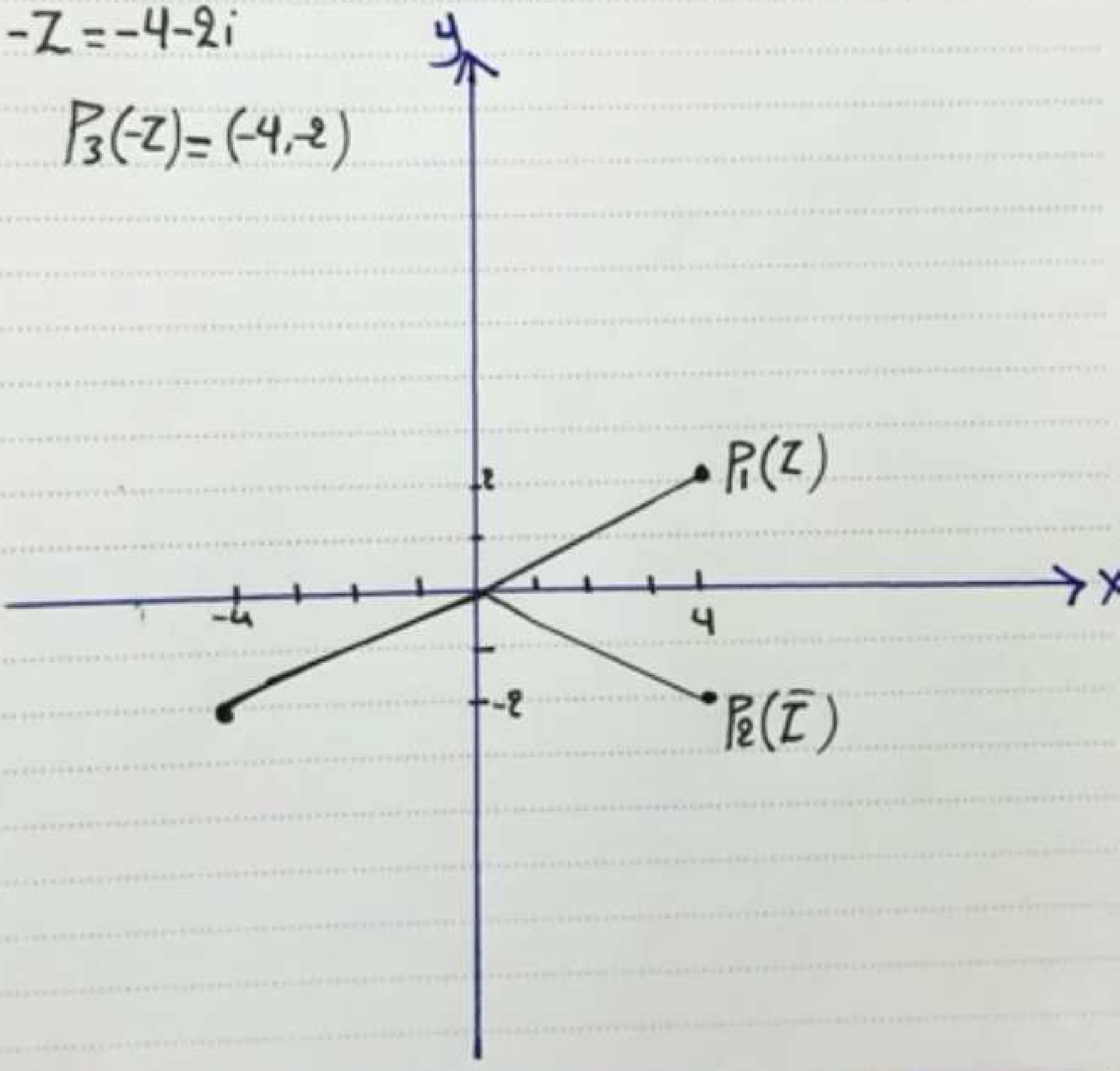
اذا كان $Z=4+2i$ فوضح على شكل ارجاند كلاً من:
$Z, \bar{Z}, -Z$

$Z=4+2i \Rightarrow P_1(Z)=(4,2)$

$\bar{Z}=4-2i \Rightarrow P_2(\bar{Z})=(4,-2)$

$-Z=-4-2i$

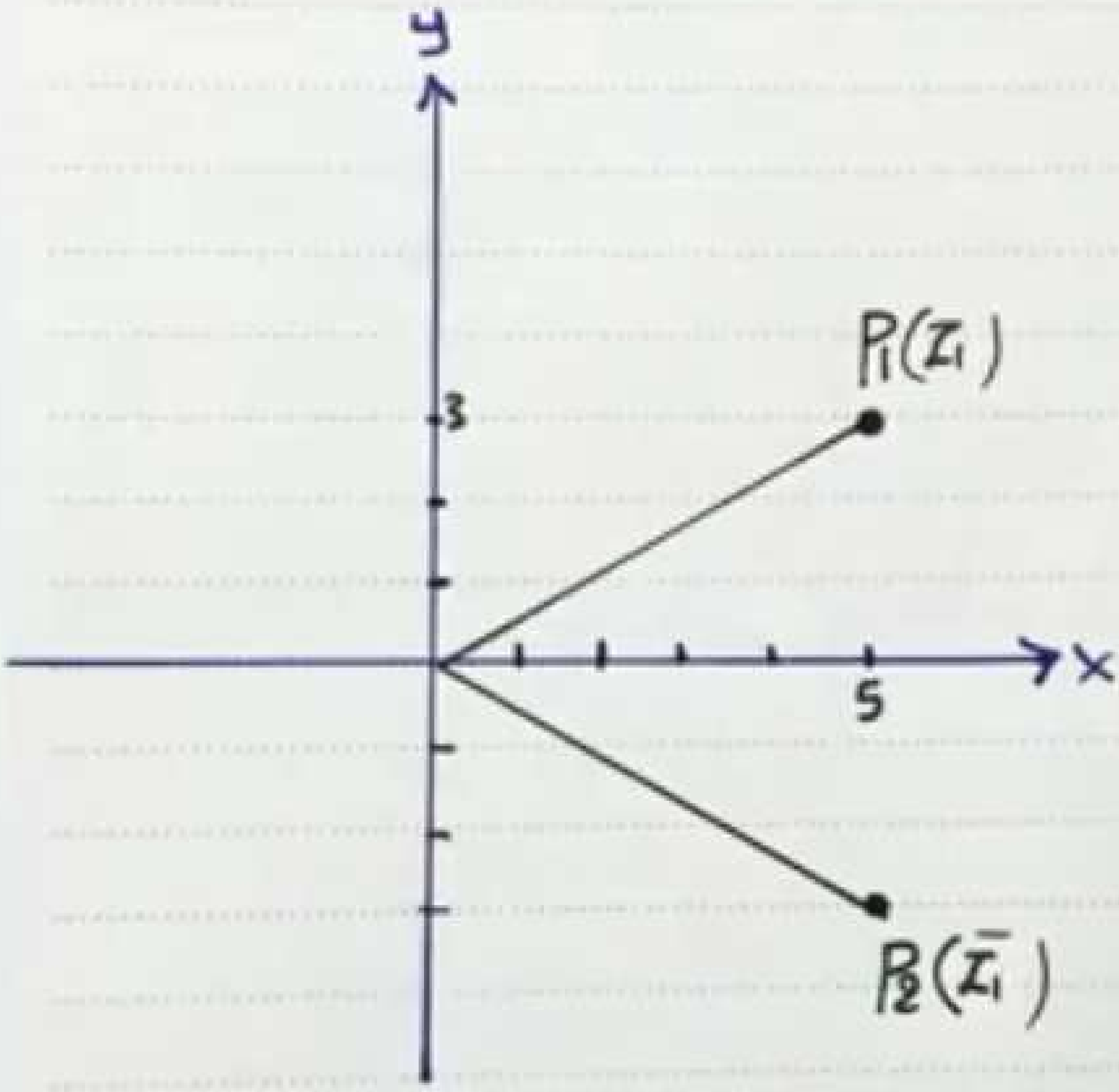
$P_3(-Z)=(-4,-2)$



س④ اكتب العدد المرافق لكل من الاعداد الاتية ثم مثل الاعداد ومرافقاتها على شكل ارجاند

① $Z_1 = 5+3i \Rightarrow P_1(Z_1) = (5,3)$ ② $-3+2i$ واجب

$\overline{Z_1} = 5-3i \Rightarrow P_2(\overline{Z_1}) = (5,-3)$



وزاري 2018 دور ① احيائي // مهم جداً

س⑤ ضع المقدار $\frac{(1+i)^{15}}{128}$ بالصيغة الحادية ثم مثل العدد ومرافقه على شكل ارجاند.

$$Z = \frac{(1+i)^{15}}{128}$$

$$Z = \frac{(1+i)^{14}(1+i)}{128} = \frac{[(1+i)^2]^7(1+i)}{128}$$

$i^7 = i^{4(1)+3} = i^3 = -i$

$$Z = \frac{(2i)^7(1+i)}{128} = \frac{(2)^7 i^7 (1+i)}{128}$$

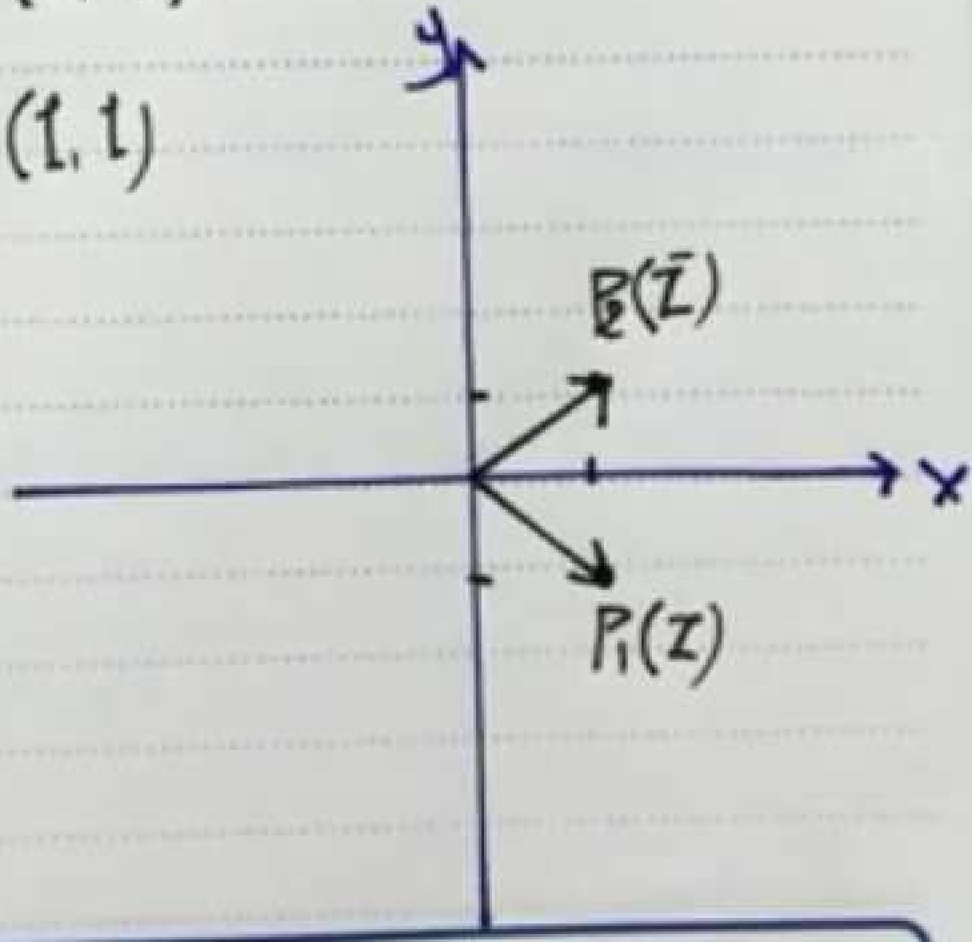
$$Z = \frac{\cancel{128}(-i)(1+i)}{\cancel{128}}$$

$$Z = -i - i^2$$

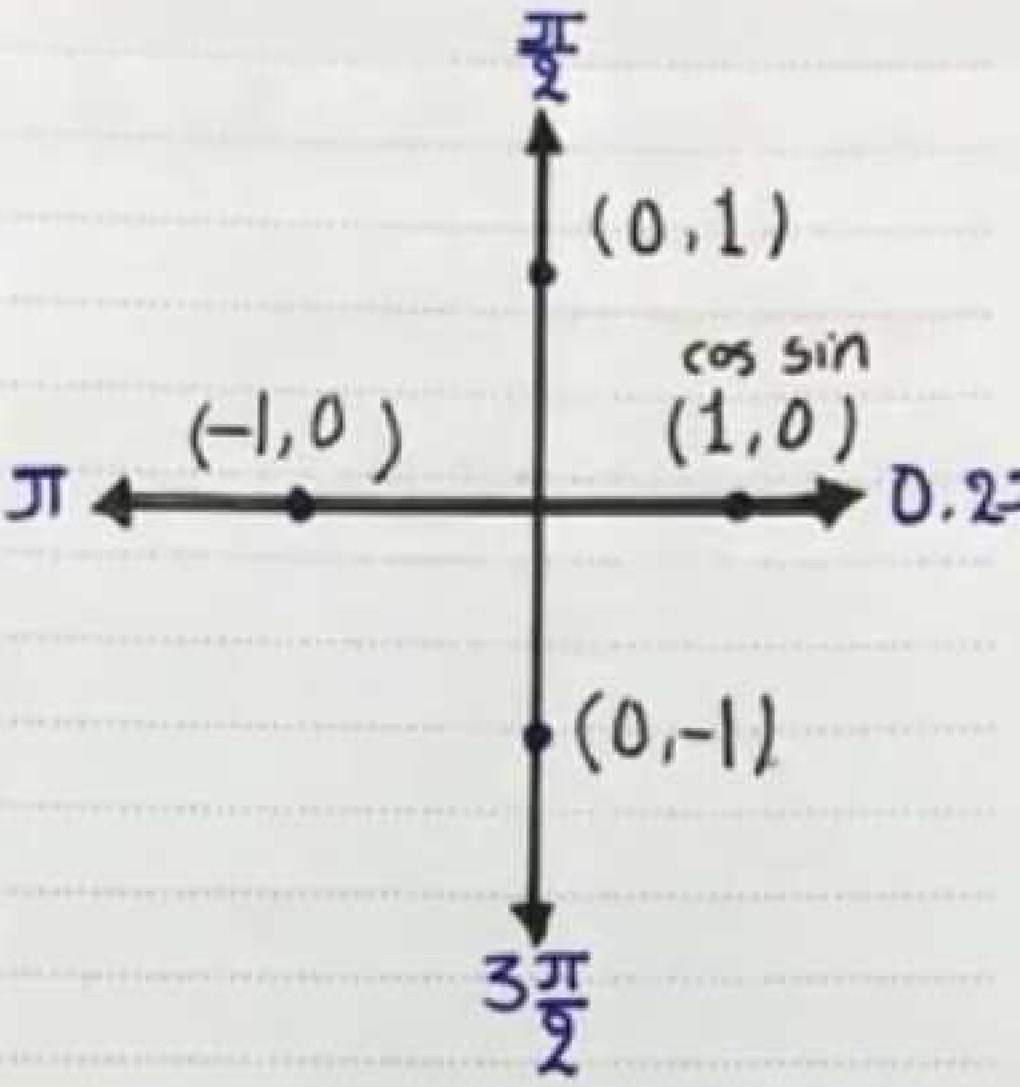
$$Z = -i - (-1)$$

$$Z = 1 - i \Rightarrow P_1(Z) = (1,-1)$$

$$\bar{Z} = 1 + i \Rightarrow P_2(\bar{Z}) = (1,1)$$



θ		$\sin\theta$	$\cos\theta$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$



القيمة الاساسية لسعة العدد المركب $= arg(Z)$

زاوية الاسناد $= \theta$

الربع الثاني

$(\bar{x}, \overset{+}{y})$

$arg(z) = \pi - \theta$

الربع الاول

$(\overset{+}{x}, \overset{+}{y})$

$arg(Z) = \theta$

الربع الثالث

$(\bar{x}, \bar{y})$

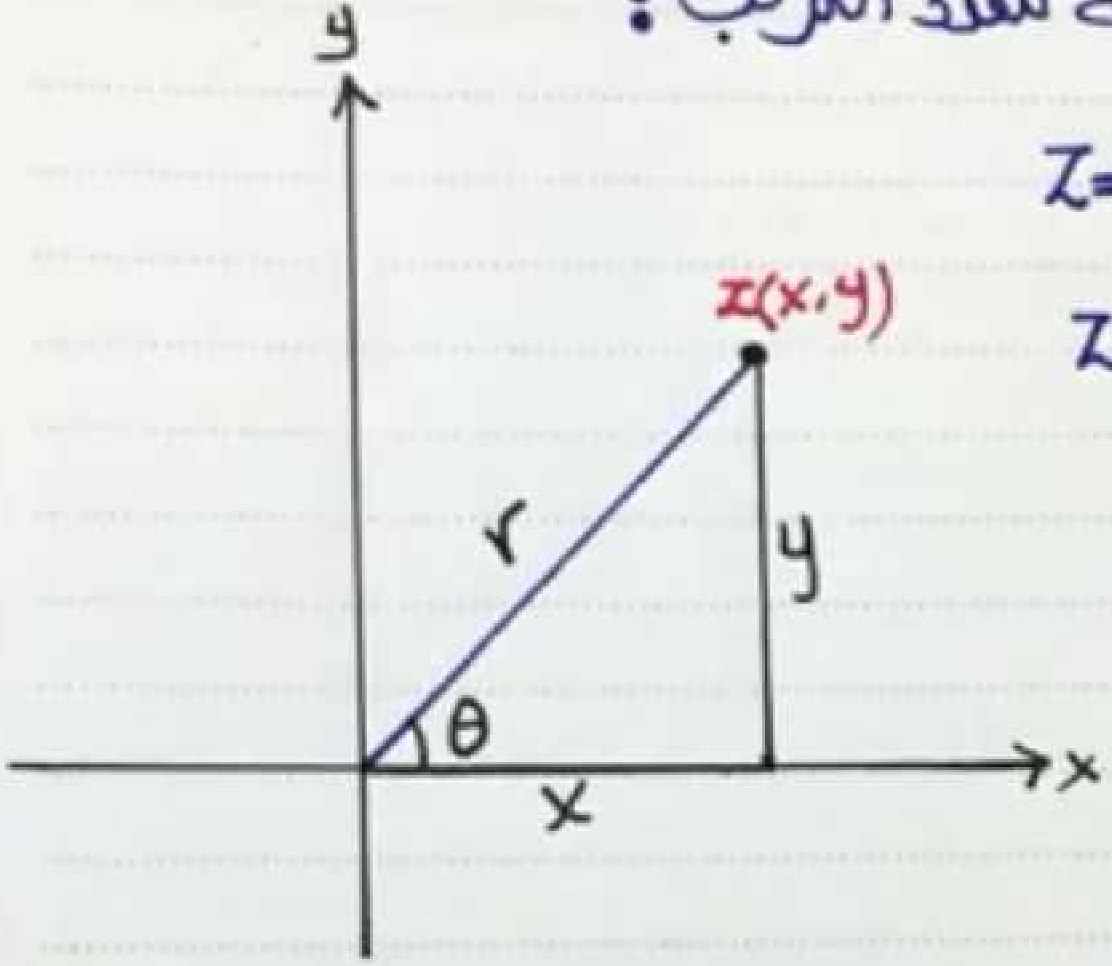
$arg(z) = \pi + \theta$

الربع الرابع

$(\overset{+}{x}, \bar{y})$

$arg(z) = 2\pi - \theta$

* ايجاد المقياس والسعة للعدد المركب :



الصيغه العاديه ← $Z = x + yi$

الصيغة الديكارتيه ← $Z = (x, y)$

حيث r يسمى مقياس العدد المركب او مقياس Z
ويرمز له $\|Z\|$
حيث :

$$r = \|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

لايجاد سعة العدد المركب $\arg(Z)$

نجد

$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ $\sin\theta = \frac{y}{r}$

الصيغه القطبيه ← $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

س① اذا كان $Z=1+\sqrt{3}i$ جد المقياس والقيمة الاساسية لسعة Z .

$Z=1+\sqrt{3}i \quad , \quad Z=(1,\sqrt{3})$

المقياس $r=\|Z\|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r}=\frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \theta=\frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

لانها في الربع الاول السعة $\arg(Z)=\frac{\pi}{3}$

س② اذا كان $Z=-2+2i$ جد المقياس والسعة الاساسيه للعدد المركب Z.

$Z=-2+2i \quad , \quad Z=(-2,2)$

المقياس $r=\|Z\|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r}=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \theta=\frac{\pi}{4}$ زاوية الاسناد

في الربع الثاني

$\arg(Z)=\pi-\frac{\pi}{4}$

السعة $\arg(Z)=\frac{3\pi}{4}$

س③ اذا كان $Z=-1-i$ نجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة Z.

$Z=-1-i \quad , \quad Z=(-1,-1)$

المقياس $r=\|Z\|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}\theta=\frac{\pi}{4}$ زاوية الاسناد

تقع في الربع الثالث

$\arg(Z)=\pi+\frac{\pi}{4}$

السعة $\arg(Z)=\frac{5\pi}{4}$

س④ اذا كان $Z=2\sqrt{3}-2i$ نجد المقياس والقيمة الاساسيه لسعة Z.

$Z=2\sqrt{3}-2i \quad , \quad Z=(2\sqrt{3},-2)$

المقياس $r=\|Z\|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}\end{array}\right\}\theta=\frac{\pi}{6}$ زاوية الاسناد

تقع في الربع الرابع

$\arg(Z)=2\pi-\frac{\pi}{6}$

السعة $\arg(Z)=\frac{11\pi}{6}$

الوصول الى - 100

س 5 جد المقياس والقيمة الاساسيه للسعه للاعداد المركبه الاتيه:-

وزاري 2007 دور 2

1) $Z = \frac{2i}{1+i}$ ⟶ $r = \sqrt{2}$, $\arg(Z) = \frac{\pi}{4}$

وزاري 2008 دور 1

2) $Z = (1+\sqrt{3}i)^2$ ⟶ $r = 4$, $\arg(Z) = \frac{2\pi}{3}$

محور // الصيغة القطبية للعدد المركب

* خطوات ايجاد الصيغة القطبية :

① نضع العدد بالصيغة العادية $Z = x + yi$ ثم الديكارتية $Z(x, y)$

② نجد المقياس $r = \|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

③ نجد القيمة الاساسية للسعة

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\sin\theta = \frac{y}{r}$

$\arg(Z) = \theta$

④ نعوض عن r ، $\arg(Z)$ في $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

وزاري 2014 د3

س① جد الصيغة القطبية للعدد المركب $5-5i$.

الحل :-

$Z = 5 - 5i \quad , \quad Z = (\overset{x}{5}, \overset{y}{-5})$

$r = \|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\}$ زاوية الاسناد $\theta = \frac{\pi}{4}$

تقع في الربع الرابع

$\arg(Z) = 2\pi - \frac{\pi}{4}$

$\arg(Z) = \frac{7\pi}{4}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

وزاري 2015 دور ③

س ②

اكتب الصيغة القطبية للعدد المركب ($3-3\sqrt{3}\,i$)

$Z = 3-3\sqrt{3}\,i \quad , \quad Z = (3, -3\sqrt{3})$

$r = \|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$ المقياس

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ تقع في الربع الرابع

$\arg(z) = \frac{5\pi}{3}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z = 6\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

س ③ عبر عن العدد $Z = -2\sqrt{3} - 2i$ بالصيغة القطبية.
واجب

اثرائي

س④ اكتب الصيغة القطبيه للعدد المركب $Z = \frac{7+\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-12}}$

الحل :-

$$Z = \frac{7+\sqrt{3}\times\sqrt{-1}}{1+\sqrt{12}\times\sqrt{-1}} = \frac{7+\sqrt{3}\,i}{1+2\sqrt{3}\,i} \cdot \frac{1-2\sqrt{3}\,i}{1-2\sqrt{3}\,i}$$

$$Z = \frac{7-14\sqrt{3}i+\sqrt{3}i-6i^2}{1+12} = \frac{7-13\sqrt{3}i+6}{13}$$

$$Z = \frac{13-13\sqrt{3}i}{13} \Rightarrow Z = 1-\sqrt{3}i \;,\; Z = (\overset{x}{1}, \overset{y}{-\sqrt{3}})$$

القياس $r = \|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{3}$$ زاويه الاسناد

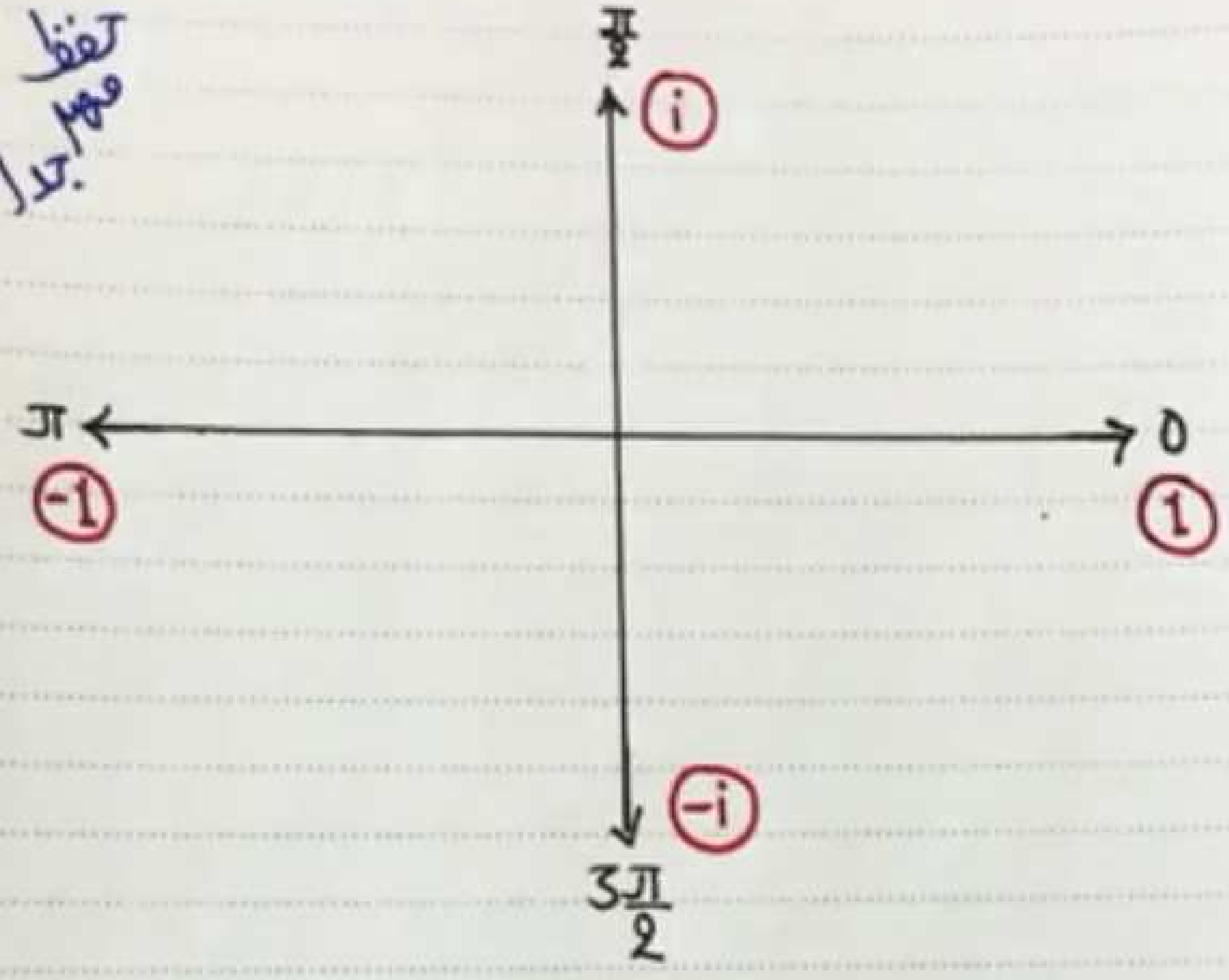
$$\arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\arg(z) = \frac{5\pi}{3}$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

تحفظ
مهم جداً.



س ⑤ اكتب الصيغه القطبيه للاعداد المركبه الاتيه

① $1 \Rightarrow Z = \cos 0 + i\sin 0$

② $-1 \Rightarrow Z = \cos \pi + i\sin \pi$

③ $i \Rightarrow Z = \cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2}$

④ $-i \Rightarrow Z = \cos \frac{3\pi}{2} + i\sin \frac{3\pi}{2}$

القياس الرئيس للزاويه $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0^\circ \quad 90^\circ \quad 180^\circ \quad 270^\circ$

① اذا كانت الزاويه محوريه $0 \, ، \, \frac{\pi}{2} \, ، \, \pi \, ، \, \frac{3\pi}{2}$

مثال // احسب $Z = \frac{1}{512}\left(\cos\frac{3\pi}{2} - i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$$Z = \frac{1}{512}(0 + i) = \frac{1}{512}i$$

② في الزوايا من النوع $n\frac{\pi}{6} \, ، \, n\frac{\pi}{4} \, ، \, n\frac{\pi}{3}$ حيث n اقل من ضعف المقام.

$7\frac{\pi}{6} \, ، \, 5\frac{\pi}{4} \, ، \, 2\frac{\pi}{3}$

نقوم بحساب قيمة الزاويه لكل لمعرفة الربع الذي تقع فيه ثم نحذف قيمة n ونضع في الخارج بدلاً عنها اشارة موجبه او سالبه حسب ذلك الربع.

مثال ①

احسب $Z = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos 5\frac{\pi}{4} + i\sin 5\frac{\pi}{4}\right)$

$5\frac{\pi}{4} = 225^\circ$
في الربع الثالث

$$Z = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$Z = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

مهم

مثال ② //

$$Z = \cos \frac{20}{24}\pi + i \sin \frac{20}{24}\pi$$

$$\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$$

في الربع الثاني

$$Z = \cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi$$

$$Z = -\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$$

$$Z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$$

مثال ③ //

$$Z = 8\sqrt{2}\left(\cos 7\frac{\pi}{4} + i \sin 7\frac{\pi}{4}\right)$$

القياس الرئيس $0 \leq \theta < 2\pi$

③ في الزوايا من النوع $n\frac{\pi}{6}, n\frac{\pi}{4}, n\frac{\pi}{3}$ مهم

حيث n اكبر من ضعف المقام

نأخذ فقط باقي قسمة n على ضعف المقام

مثال // جد القياس الرئيس للزوايا الاتية :-

① $10\frac{\pi}{3} \Rightarrow 4\frac{\pi}{3}$

$10 \div 6 = 1$
والباقي 4

② $17\frac{\pi}{6} \Rightarrow 5\frac{\pi}{6}$

$17 \div 12 = 1$
والباقي 5

③ $51\frac{\pi}{4} \Rightarrow 3\frac{\pi}{4}$

$51 \div 8 = 6$
والباقي 3

④ $49\frac{\pi}{4}$

⑤ $11\frac{\pi}{4}$

ممرجدا " في العزازي

مبرهنة ديموافر

لكل $n \in N$, $\theta \in R$ فأن :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$ تحفظ

تعميم لمبرهنة ديموافر

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta$$ تحفظ

توضيح ، تعميم لمبرهنة ديموافر

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$$

$$= \cos n\theta - i\sin n\theta$$

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Mathematic

الأستاذ : حيدر عبد الائمة

(امثلة الكتاب + تمارين الكتاب + الوزاريات) لموضوع مبرهنة ديموافر

س① احسب $\left(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi\right)^4$

س② احسب $\left(\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi\right)^4$ ⇐ 2012 تمهيدي

س③ احسب $\left[\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi\right]^{-3}$ ⇐ 2017 دور ② احيائي / موصل

س④ احسب $\left(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi\right)^{-4}$ ⇐ 2018 دور ② احيائي

س⑤ احسب باستخدام مبرهنة ديموافر $(1+i)^{11}$ ⇐ 2019 تمهيدي تطبيقي

س⑥ احسب باستخدام مبرهنة ديموافر $(1-i)^7$ ⇐ 2012 دور ①

س⑦ احسب باستخدام مبرهنة ديموافر $(\sqrt{3}+i)^{-9}$ ⇐ 2014 دور ②

س⑧ جد باستخدام مبرهنة ديموافر $(-\sqrt{3}+i)^5$ ⇐ 2018 دور ① تطبيقي

س⑨ جد باستخدام مبرهنة ديموافر $(1+i)^{-5}$ ⇐ 2018 تمهيدي احيائي

س⑩ جد باستخدام مبرهنة ديموافر $(-1-\sqrt{-1})^{-3}$ ⇐ 2018 دور ① خارج

س⑪ باستخدام مبرهنة ديموافر جد $\frac{1}{(1-\sqrt{3}i)^4}$ ⇐ 2018 دور ② تطبيقي

س⑫ احسب $\left[2\left(\cos 5\frac{\pi}{4} + i\sin 5\frac{\pi}{4}\right)\right]^7$ ⇐ 2017 دور ② احيائي

موبايل : 07805330465

النوع الاول // التعويض المباشر

س① احسب $\left(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi\right)^4$

$$= \cos\frac{\cancel{(4)}(3)\pi}{\cancel{8}\,2} + i\sin\frac{\cancel{(4)}(3)\pi}{\cancel{8}\,2}$$

$$= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$= 0 + i(-1)$$

$$= 0 - i$$

س② احسب $\left(\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi\right)^4$

$$= \cos\frac{\cancel{(4)}(5)\pi}{\cancel{24}\,6} + i\sin\frac{\cancel{(4)}(5)\pi}{\cancel{24}\,6}$$

$$= \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$$

الربع الثاني $\frac{5\pi}{6}$

$$= -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

س③ احسب $\left[\cos \frac{7}{12}\pi + i\sin \frac{7}{12}\pi\right]^{-3}$

$= \cos \frac{(3)(7)\pi}{\cancel{12}\,4} - i\sin \frac{(3)(7)\pi}{\cancel{12}\,4}$

$= \cos 7\frac{\pi}{4} - i\sin 7\frac{\pi}{4}$

$7\frac{\pi}{4}$ تقع في الربع الرابع

$= \cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4}$

س④ احسب $\left[\cos \frac{3}{8}\pi + i\sin \frac{3}{8}\pi\right]^{-4}$

① الزوايا المحوريه 0° 90° 180° 270°

0 $\frac{\pi}{2}$ π $\frac{3\pi}{2}$

② الزوايا من النوع $n\frac{\pi}{6}$ ، $n\frac{\pi}{4}$ ، $n\frac{\pi}{3}$

حيث n اقل من ضعف المقام

نضرب قيمة $n \times 5$ لمعرفة الربع الذي تقع فيه

ثم نحذف n و نضع اشارة سالبه او موجبه في الخارج

③ الزوايا من النوع $n\frac{\pi}{6}$ ، $n\frac{\pi}{4}$ ، $n\frac{\pi}{3}$

حيث n اكبر من ضعف المقام

نأخذ باقي قسمة البسط على ضعف المقام

مهم جدا" وزاري 2017 دور ② احيائي

س⑤ احسب $\left[2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^7$

الحل :-

$$=(2)^7\left(\cos 5\frac{\pi}{4}+i\sin 5\frac{\pi}{4}\right)^7$$

$$=128\left[\cos(7)(5)\frac{\pi}{4}+i\sin(7)(5)\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=128\left(\cos 35\frac{\pi}{4}+i\sin 35\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=128\left(\cos 3\frac{\pi}{4}+i\sin 3\frac{\pi}{4}\right)$$

$3\frac{\pi}{4}$ تقع في الربع الثاني

$$=128\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=128\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$

$$=\frac{-128}{\sqrt{2}}+\frac{128}{\sqrt{2}}i$$

$$=\frac{-64\times 2}{\cancel{\sqrt{2}}}+\frac{64\times 2}{\cancel{\sqrt{2}}}i$$

$$=-64\sqrt{2}+64\sqrt{2}\,i$$

النوع الثاني // التعويض غير المباشر

* خطوات الحل :

① نضع العدد بالصيغة العادية $Z=x+yi$ ثم الديكارتية $Z=(x,y)$

② نجد المقياس $r=\|Z\|=\sqrt{x^2+y^2}$

③ نجد سعة العدد المركب

$\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\sin\theta=\frac{y}{r}$ حسب الربع الذي تقع فيه $\arg(Z)=\theta$

④ الصيغة القطبية

$$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

⑤ مبرهنة ديموافر

$$Z^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$
$$=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

س⑥ احسب باستخدام مبرهنة ديموافر $(1+i)^{11}$

$z = 1+i \quad , \quad z(\underset{x}{1},\underset{y}{1})$

$r = \|z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$

زاوية الاسناد

تقع في الربع الاول

$\arg(z) = \frac{\pi}{4}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z^{11} = (\sqrt{2})^{11}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{11}$

$z^{11} = (\sqrt{2})^{10}\sqrt{2}\left(\cos 11\frac{\pi}{4} + i\sin 11\frac{\pi}{4}\right)$

$= (2)^5\sqrt{2}\left(\cos 3\frac{\pi}{4} + i\sin 3\frac{\pi}{4}\right)$

$= 32\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 32\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= -\frac{32\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} + \frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{2}}i \quad = -32+32i$

س ⑦ احسب باستخدام مبرهنة ديموافر $(1-i)^7$

الحل :-

$Z = 1 - i \ , \ Z(1,-1)$

$$r = \|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$ زاوية الاسناد

تقع في الربع الرابع

$$\arg(Z) = 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\arg(Z) = \frac{7\pi}{4}$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z = \sqrt{2}\left(\cos 7\frac{\pi}{4} + i\sin 7\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z^7 = (\sqrt{2})^7\left(\cos 7\frac{\pi}{4} + i\sin 7\frac{\pi}{4}\right)^7$$

$49 \div 8 = 6$ والباقي 1

$$= (\sqrt{2})^6\sqrt{2}\left(\cos 49\frac{\pi}{4} + i\sin 49\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= (2)^3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$= \frac{8\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} + \frac{8\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}i = 8 + 8i$$

س ⑧ جد باستخدام مبرهنة ديموافر $(-\sqrt{3}+i)^5$

$z = 16\sqrt{3} + 16i$

2018 دور 2
تطبيقي

س ⑨ باستخدام مبرهنة ديموافر احسب $\dfrac{1}{(1-\sqrt{3}i)^4}$

الحل :

$(1-\sqrt{3}i)^{-4} \quad Z = 1-\sqrt{3}i\ , \quad Z(\overset{x}{1}, \overset{y}{-\sqrt{3}})$

$r = \|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

زاوية الاسناد

$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{3}$

الربع الرابع

$\arg(Z) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z = 2\left(\cos 5\frac{\pi}{3} + i\sin 5\frac{\pi}{3}\right)$

$Z^{-4} = (2)^{-4}\left(\cos 5\frac{\pi}{3} + i\sin 5\frac{\pi}{3}\right)^{-4}$

$= \frac{1}{2^4}\left(\cos 20\frac{\pi}{3} - i\sin 20\frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{16}\left(\cos 2\frac{\pi}{3} - i\sin 2\frac{\pi}{3}\right)$

$\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$
الربع الثاني

$= \frac{1}{16}\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= -\frac{1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}i$

س 13 بسط ما يأتي :
الحل :-

ⓐ $\dfrac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^3}$

$= \dfrac{[(\cos\theta + i\sin\theta)^2]^5}{[(\cos\theta + i\sin\theta)^3]^3}$

$= \dfrac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^9}$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos\theta + i\sin\theta$

ⓑ $(\cos\theta + i\sin\theta)^8 (\cos\theta - i\sin\theta)^4$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^8 . (\cos\theta + i\sin\theta)^{-4}$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^{8+-4}$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^4$

$= \cos 4\theta + i\sin 4\theta$

وزاري 2017 دور ① تطبيق
2018 تمهيدي ② احيائي

س⑭ اثبت ان
$$\left[\frac{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^4}{(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)^2}\right](\cos\theta - i\sin\theta)^2 = 1$$

الحل :-
$$\frac{\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^3\right]^4}{\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^5\right]^2} \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)^{-2}$$
$$= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{12}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{10}} \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)^{-2}$$
$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^{2} \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)^{-2}$$
$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^{0} = 1$$ و.هـ.م

وزاري 2018 دور ② احيائي

س⑮ ضع بابسط صورة
$$[\cos\theta - i\sin\theta]^4 \cdot \frac{[\cos 5\theta + i\sin 5\theta]^2}{[\cos 3\theta + i\sin 3\theta]^2}$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= 1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\boxed{= 1 - 2\sin^2\theta}$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)$$

$$= \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta$$

$$\boxed{= 2\cos^2\theta - 1}$$

قوانين ضعف الزاوية

① $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

② $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ تحفظ

او

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

او

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

تذكير / العلاقة الذهبيه

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

وزاري 2019 // دور ① خارج العراق

س 16 اذا كان $Z=\cos 2x+i\sin 2x$ فأثبت ان $\frac{2}{1+Z}=1-i\tan x$

$$L.h.s=\frac{2}{1+Z}=\frac{2}{1+\cos 2x+i\sin 2x}$$

$$=\frac{2}{\cancel{1}+2\cos^2 x-\cancel{1}+i\,2\sin x\cos x}$$

$$=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cos x(\cos x+i\sin x)}=\frac{1}{\cos x(\cos x+i\sin x)}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos x(\cos x+i\sin x)}=\frac{\cos^2 x-i^2\sin^2 x}{\cos x(\cos x+i\sin x)}$$

$$=\frac{(\cos x-i\sin x)\cancel{(\cos x+i\sin x)}}{\cos x\cancel{(\cos x+i\sin x)}}$$

$$=\frac{\cos x}{\cos x}-i\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=1-i\tan x$$

$$=R.h.s$$

وزاري 2019 حعدد ② احيائي
اثرائي

س 17 اذا كان $Z = \cos\theta + i\sin\theta$ اثبت ان $\frac{Z^n}{1+Z^{2n}} = \frac{1}{2\cos n\theta}$

الحل :-

$$L-h-S = \frac{Z^n}{1+Z^{2n}}$$

$$= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n}{1+(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n}} = \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{1+\cos 2n\theta + i\sin 2n\theta}$$

$$= \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{\cancel{1} + 2\cos^2 n\theta - \cancel{1} + i\,2\sin n\theta\cos n\theta}$$

$$= \frac{\cancel{(\cos n\theta + i\sin n\theta)}}{2\cos n\theta\cancel{(\cos n\theta + i\sin n\theta)}}$$

$$= \frac{1}{2\cos n\theta}$$

$$= R-h-S$$

موبايل : 07805330465

نتيجة مبرهنة ديموافر

لكل $\theta \in R$, $n \in Z^+$ فان

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right]$$

$k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

ملاحظة : $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$

سؤال / متى نستخدم مبرهنة ديموافر ومتى نستخدم النتيجة

نتيجة مبرهنة ديموافر	مبرهنة ديموافر
الاس : $n \in Q$ الكسور	الاس : $n \in Z^-$, $n \in Z^+$
$(-1+\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}}$	$(1+i)^{11}$
اوجد الجذور التربيعيه للعدد $-1+\sqrt{3}i$	$(-\sqrt{3}+i)^{-4}$
$(\sqrt{3}+i)^{\frac{2}{5}}$	$(5+5i)^{3}$
او حل المعادلة $x^3+1=0$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر	⋮

خطوات الحل لنتيجة مبرهنة ديموافر :-

① نضع العدد بالصيغة العادية $Z = x + yi$ ثم $Z(x, y)$

② نجد المقياس $r = \|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

③ نجد القيمة الاساسية لسعة Z
$\arg(Z) = \theta$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\sin\theta = \frac{y}{r}$

④ الصيغة القطبية $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

⑤ نتيجة مبرهنة ديموافر

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right]$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

س (18) — جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-1+\sqrt{3}i$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر

الحل :-

$z=-1+\sqrt{3}i \;,\; z=(-1,\sqrt{3})$

$r=\|z\|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}\\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\;\theta=\frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\arg(z)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ الربع الثاني

$z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right]$

$n=2 \qquad k=0,1,2,\dots,(n-1)$

$z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2}\right]$

$k=0,1$

when $k=0$

$$Z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad = \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

when $k=1$

$$Z_2=\sqrt{2}\left(\cos 4\frac{\pi}{3}+i\sin 4\frac{\pi}{3}\right) \qquad 4\frac{\pi}{3} \text{ الربع الثالث}$$

$$=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{3}+-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad = -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

$$\left.\begin{array}{l} Z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i \\ Z_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i \end{array}\right\} \text{ الجذران التربيعيان}$$

س 15

جد الجذور التربيعية للعدد المركب $1+\sqrt{3}\,i$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر

الجذران التربيعيان $Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ و $Z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

وزاري 2019 دور ① تطبيقي

س 20

بأستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد $27i$

حل المعادلة التالية في $\mathbb{C}$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر $\frac{x^3}{i}-27=0$

الحل :-

$$\frac{x^3}{i}-27=0 \quad]\cdot i$$

$$x^3-27i=0$$

$$x^3=27i$$

$$x^3=27\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right]$$

$$k=0,1,2,\dots,(n-1)$$

$$r=27 \;,\; \theta=\frac{\pi}{2} \;,\; n=3$$

$$x=\sqrt[3]{27}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right]$$

$$k=0,1,2$$

$x_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $K=0$

$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

$x_2 = 3\left(\cos 5\frac{\pi}{6} + i\sin 5\frac{\pi}{6}\right)$ $K=1$

$= 3\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

$x_3 = 3\left(\cos 3\frac{\pi}{2} + i\sin 3\frac{\pi}{2}\right)$ $K=2$

$= 3(0 - i) = -3i$

وزاري 2018 دور ① خارج

س 21 حل المعادلة $z^3 - 64i = 0$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديمواڤر.

$Z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$ ، $Z_2 = -2\sqrt{3} + 2i$ ، $Z_3 = -4i$

وزاري 2018 حمد ① احيائي

س 22

جد الجذور الاربعة للعدد (-16) باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر
او حل المعادلة باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر $x^4+16=0$

الحل :-

$$x^4=-16 \Rightarrow x^4=16(-1)$$

$$x^4=16(\cos\pi+i\sin\pi)$$

$$x^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right]$$

$$k=0,1,\dots,(n-1)$$

$$n=4\ ,\ r=16\ ,\ \theta=\pi$$

$$x=\sqrt[4]{16}\left[\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right]$$

$$k=0,1,2,3$$

$$x_1=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \qquad k=0$$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}i\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt2}+\frac{2}{\sqrt2}i$$

$$x_1=\sqrt2+\sqrt2\,i$$

موبايل : 07805330465

$x_2 = 2(\cos 3\frac{\pi}{4} + i\sin 3\frac{\pi}{4})$ $K=1$

$= 2(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$= 2(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$x_3 = 2(\cos 5\frac{\pi}{4} + i\sin 5\frac{\pi}{4})$ $K=2$

$= 2(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$

$= 2(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$x_4 = 2(\cos 7\frac{\pi}{4} + i\sin 7\frac{\pi}{4})$ $K=3$

$= 2(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$

$= 2(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

وزاري 2014 دور ①

س 23 مهم جداً

اوجد الصيغة القطبية للمقدار $(\sqrt{3}+i)^2$. ثم الجذور الخمسة له

الحل :-

$Z=\sqrt{3}+i \qquad Z(\underset{x}{\sqrt{3}},\underset{y}{1})$

$r=\|Z\|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\ \theta=\frac{\pi}{6}$$ زاوية الاسناد

$\arg(Z)=\frac{\pi}{6}$ الربع الاول

$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$Z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$Z^2=(2)^2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2$

$Z^2=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$(Z^2)^{\frac{1}{5}}=(4)^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$

$n=5,\ r=4,\ \theta=\frac{\pi}{3}$

موبايل : 07805330465

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right]$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

$$(Z^2)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4} \left[\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{5}\right]$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$Z_1 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right) \qquad k = 0$$

$$Z_2 = \sqrt[5]{4}\left(\cos 7\frac{\pi}{15} + i\sin 7\frac{\pi}{15}\right) \qquad k = 1$$

$$Z_3 = \sqrt[5]{4}\left(\cos 13\frac{\pi}{15} + i\sin 13\frac{\pi}{15}\right) \qquad k = 2$$

$$Z_4 = \sqrt[5]{4}\left(\cos 19\frac{\pi}{15} + i\sin 19\frac{\pi}{15}\right) \qquad k = 3$$

$$Z_5 = \sqrt[5]{4}\left(\cos 25\frac{\pi}{15} + i\sin 25\frac{\pi}{15}\right) \qquad k = 4$$

$$= \sqrt[5]{4}\left(\cos 5\frac{\pi}{3} + i\sin 5\frac{\pi}{3}\right)$$

س 24

باستخدام مبرهنة ديموافر احسب $(-2+2i\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$

او اوجد الصيغة القطبية للمقدار $(-2+2i\sqrt{3})^{2}$ ثم جد الجذور الثلاث له.

القطوع المخروطيه

20 درجه

القطع المخروطي :- هو مسار نقطة متحركة في المستوي. تكون النسبه بين هذه النقطة من نقطة ثابتة. الى بعد نفس النقطة من مستقيم معلوم تكون نسبه معينه

- النسبة الثابتة "نسبه معينه" تدعى بالاختلاف المركزي ويرمز لها e
- النقطة الثابتة تسمى بؤرة القطع المكافئ ويرمز لها F
- المستقيم المعين يسمى الدليل ويرمز له D

والقطوع المخروطيه تصنف اربعة اصناف يمكن ان نتعرف على كل صنف من الاختلاف المركزي e :

① الدائرة $e=0$ ← تابع للفصل الثالث خامس علمي

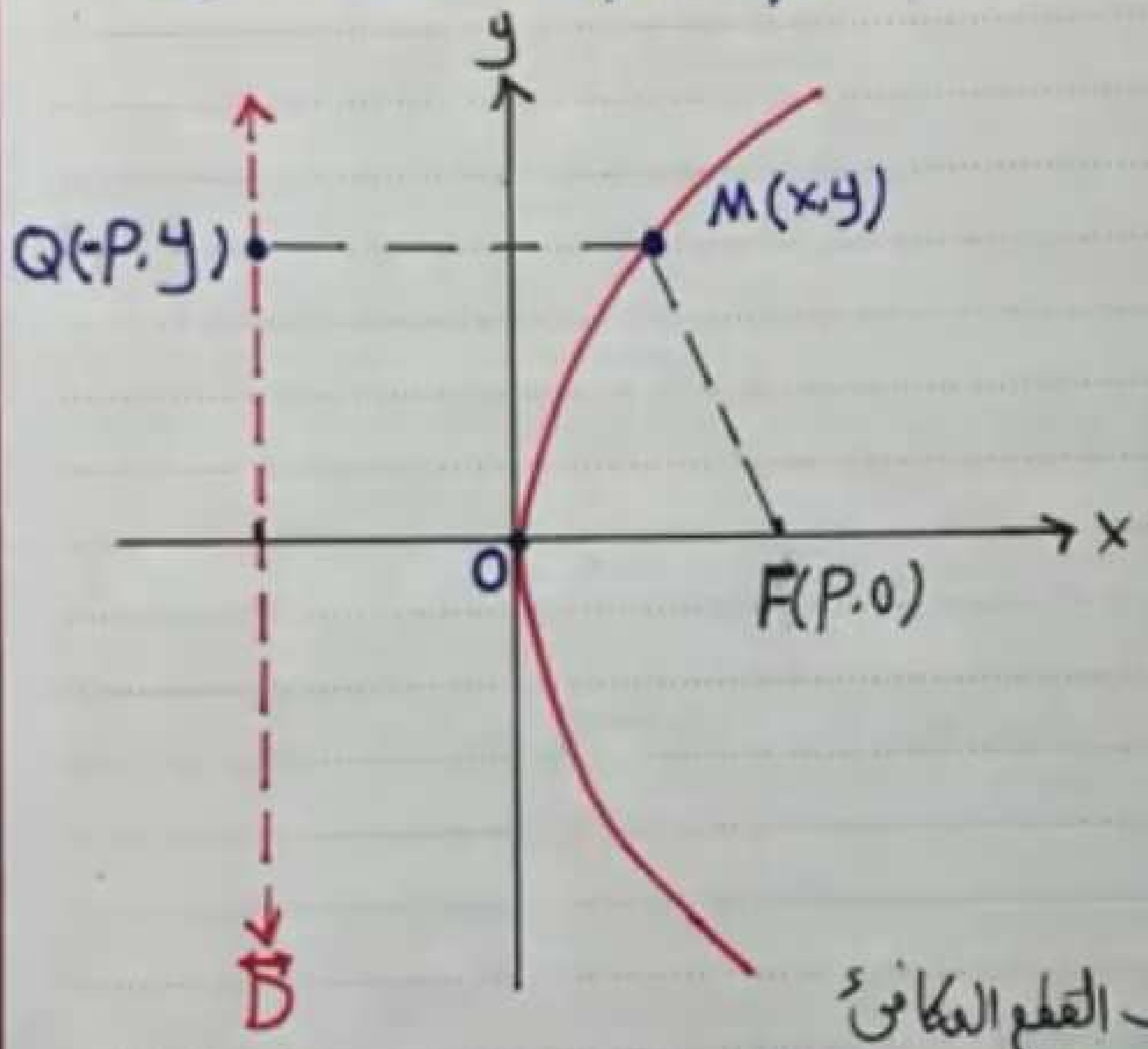
② القطع المكافئ $e=1$

③ القطع الناقص $e<1$

④ القطع الزائد $e>1$

اولاً// القطع المكافئ

القطع المكافئ: هو مجموعة النقط $M(x,y)$ في المستوي والتي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابته $F(P,0)$ تسمى البؤرة حيث $P>0$ مساويا" دائما" لبعدها عن مستقيم معلوم "D" يسمى الدليل.



تعريف القطع المكافئ

اي ان $\boxed{MF = MQ}$

O : رأس القطع المكافئ

$\overleftrightarrow{DF}$: محور القطع المكافئ وهو المستقيم المار بالبؤرة والعمود على الدليل

الأستاذ : حيدر عبد الائمة
مدارس المنصور الاهلية // السادس العلمي
موبايل : 07805330465

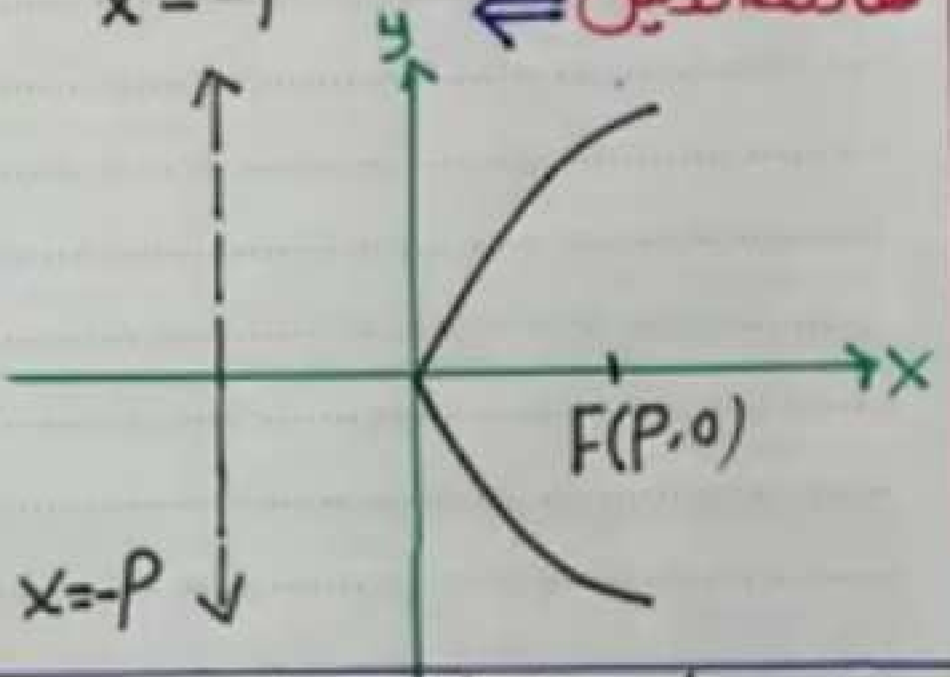
الحالات الاربعة للقطع المكافئ :-

بؤرته ∈ محور السينات الموجب

العمادلة ⟸ $y^2 = 4Px$

البؤرة ⟸ $F(P,0)$

معادلة الدليل ⟸ $x = -P$

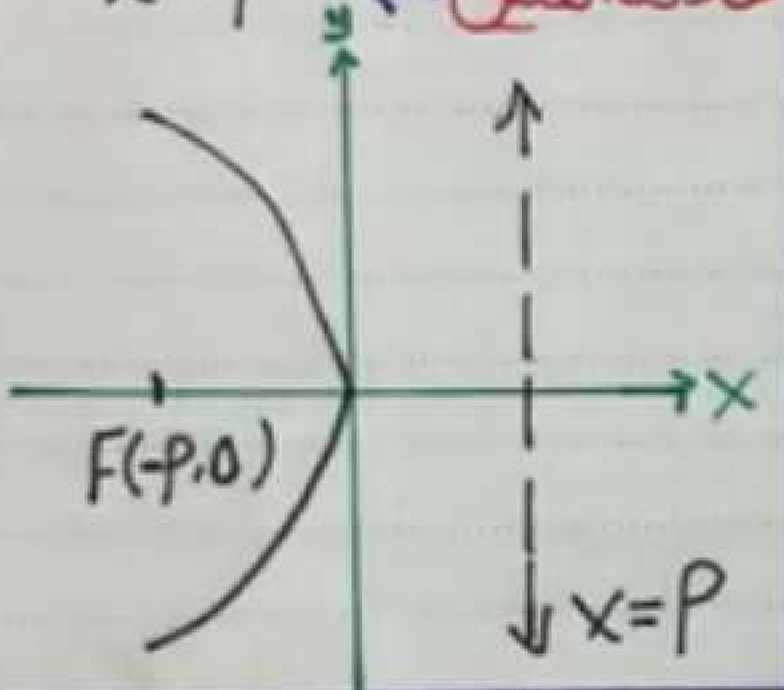


بؤرته ∈ محور السينات السالب

المعادلة ⟸ $y^2 = -4Px$

البؤرة ⟸ $F(-P,0)$

معادلة الدليل ⟸ $x = P$

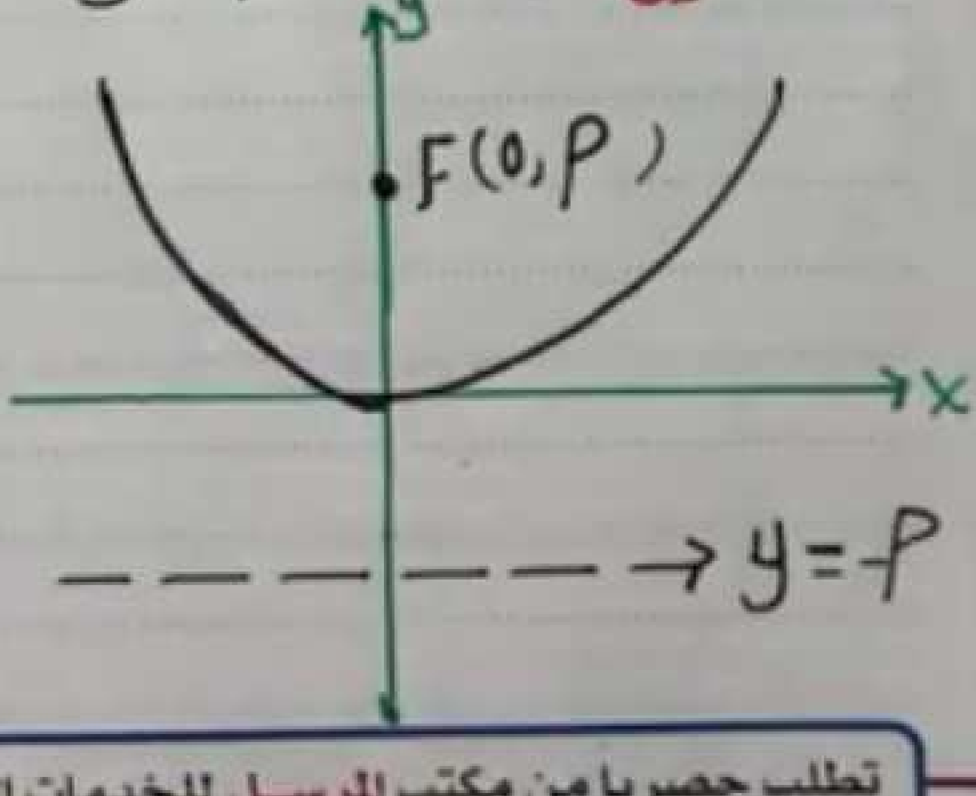


بؤرته ∈ محور الصادات الموجب

المعادلة ⟸ $x^2 = 4Py$

البؤرة ⟸ $F(0,P)$

معادلة الدليل ⟸ $y = -P$

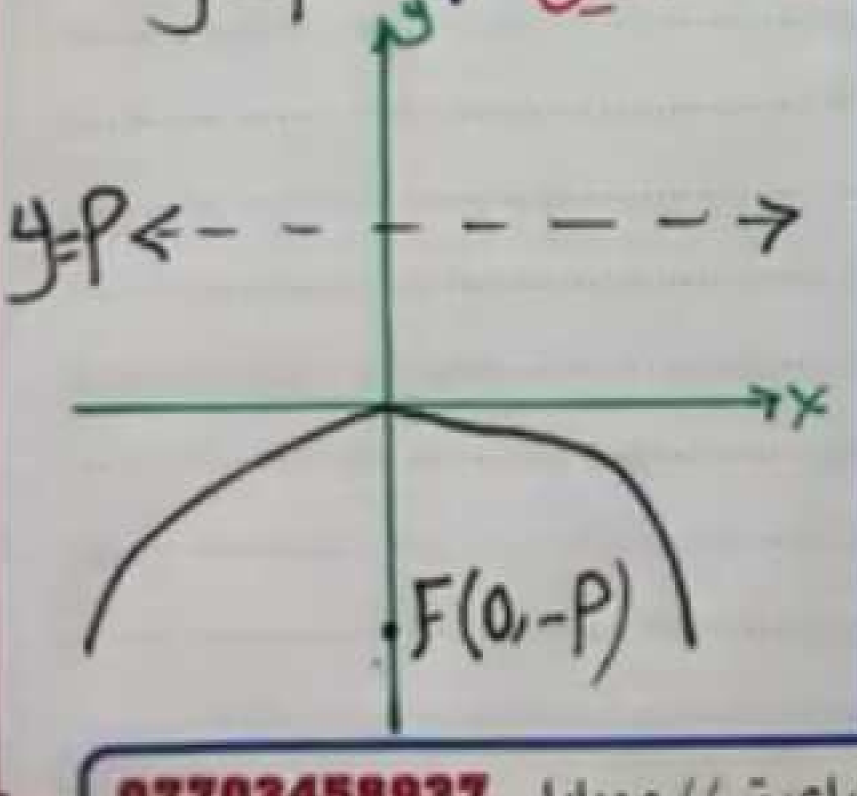


بؤرته ∈ محور الصادات السالب

المعادلة ⟸ $x^2 = -4Py$

البؤرة ⟸ $F(0,-P)$

معادلة الدليل ⟸ $y = P$



س① جد البؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ في كل مما يأتي

① $y^2=-8x$

$y^2=-4Px$ } بالمقارنه

$\frac{\cancel{4}P}{\cancel{4}}=\frac{8}{4} \rightsquigarrow P=2$

البؤرة $F(-P,0) \Rightarrow F(-2,0)$

معادلة الدليل $x=P \Rightarrow x=2$

② $x^2=4y$

$x^2=4Py$ } بالمقارنه

$\frac{\cancel{4}P}{\cancel{4}}=\frac{4}{4} \rightsquigarrow P=1$

البؤرة $F(0,P) \Rightarrow F(0,1)$

معادلة الدليل $y=-P \Rightarrow y=-1$

③ $3x^2-24y=0$

$\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}}=\frac{24y}{3}$

$x^2=8y$

$x^2=4Py$ } بالمقارنه

$\frac{\cancel{4}P}{\cancel{4}}=\frac{8}{4} \rightsquigarrow P=2$

$F(0,P) \Rightarrow F(0,2)$

$y=-P \Rightarrow y=-2$

④ $2x+16y^2=0$ مهم

$\frac{\cancel{16}y^2}{\cancel{16}}=\frac{-2x}{16}$

$y^2=-\frac{1}{8}x$

$y^2=-4Px$ } بالمقارنه

$\frac{\cancel{4}P}{\cancel{4}}=\frac{1}{8\times 4} \rightsquigarrow P=\frac{1}{32}$

$F(-P,0) \Rightarrow F(-\frac{1}{32},0)$

$x=P \Rightarrow x=\frac{1}{32}$

واجب

س② جد البؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ في كل مما يأتي

① $y^2=12x$

② $4y+x^2=0$

③ $4x^2+y=0$

④ $-x^2-y=0$

س③ جد بؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $y^2=4x$ ثم ارسمه.

الحل :-

بؤرته د محور السينات الموجب بالمقارنه

$$\left.\begin{aligned} y^2&=4x \\ y^2&=4Px \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{4}{4}P=\frac{4}{4} \Rightarrow P=1$$

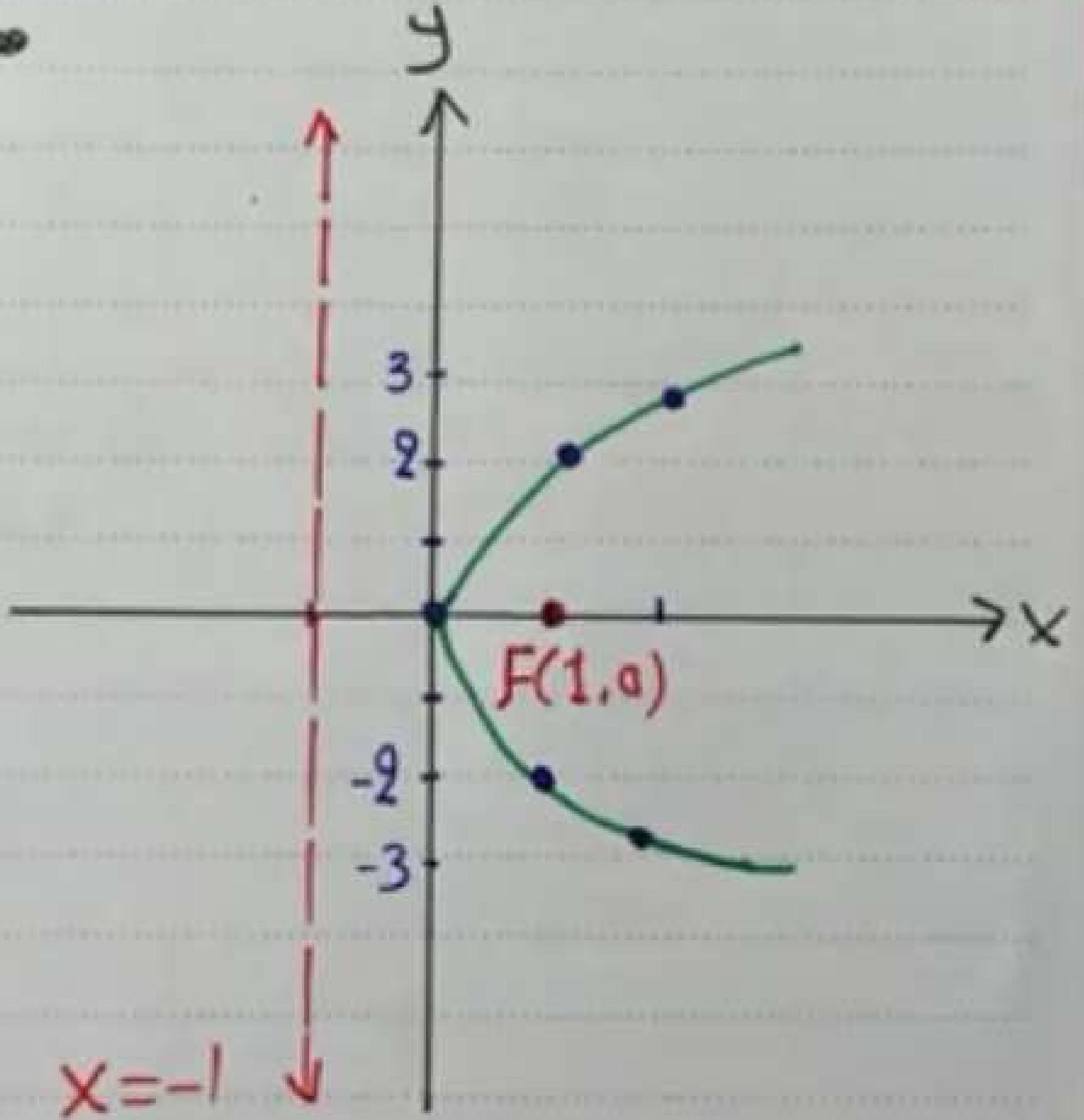
$F(1,0)$ البؤرة

$x=-1$ معادلة الدليل

$$y^2=4x$$

$$y=\pm 2\sqrt{x}$$

x	y
0	0
1	± 2
2	$\pm 2\sqrt{2}$



س④ جد بؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $y^2=16x$ ثم ارسمه.

س⑤ جد معادلة القطع المكافئ اذا علم :-

① بؤرته (3,0) والرأس نقطة الاصل.

الحل / بؤرته ⇐ محور السينات الموجب

$F(3,0) \Rightarrow P=3$

$y^2=4Px$

$y^2=4(3)x$

$y^2=12x$

② بؤرته (0,-4) والرأس نقطة الاصل.

بؤرته ⇐ محور الصادات السالب

$F(0,-4) \Rightarrow P=4$

$x^2=-4Py$

$x^2=-4(4)y$

$x^2=-16y$

③ معادلة الدليل $2x-6=0$ ورأسه نقطة الاصل.

$\frac{2x}{2}=\frac{6}{2}$

$x=3$

بؤرته ⇐ محور السينات السالب

$P=3$

$y^2=-4Px$

$y^2=-12x$

④ معادلة الدليل . $4y-3=0$ ورأسه نقطة الاصل.

$\frac{\cancel{4}y}{\cancel{4}}=\frac{3}{4}$

$y=\frac{3}{4}$ بؤرته ⇐ محور الصادات السالب

$x^2=-4Py$

$x^2=-\cancel{4}(\frac{3}{\cancel{4}})y$

$x^2=-3y$

س ⑥ جد معادلة القطع المكافئ اذا علمت :-

① بؤرته $(0,\sqrt{2})$ والرأس نقطة الاصل

② بؤرته $(5,0)$ والرأس نقطة الاصل

③ معادلة دليله $2x-3=0$ والرأس نقطة الاصل

④ معادلة الدليل $y=\sqrt{3}$ والرأس نقطة الاصل

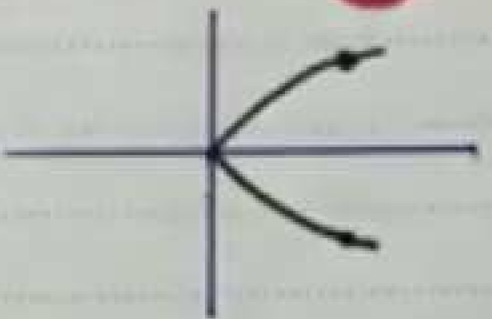
ملاحظة ① اذا كان القطع يمر بنقطة (x, y) فانها تحقق المعادلة ⇐ اي نعوض في x , y .

ملاحظة ②

التناظر حول المحورين

① التناظر حول محور السينات الموجب $(x, y)\ (x, -y)$

$$y^2 = 4px$$

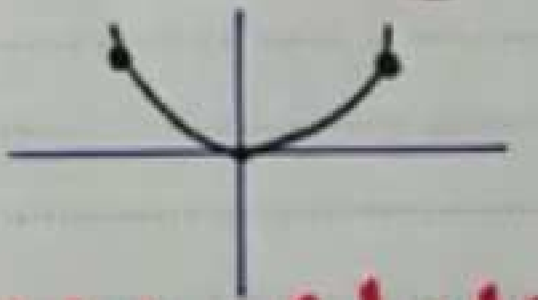


② التناظر حول محور السينات السالب $(-x, y)\ (-x, -y)$

$$y^2 = -4px$$

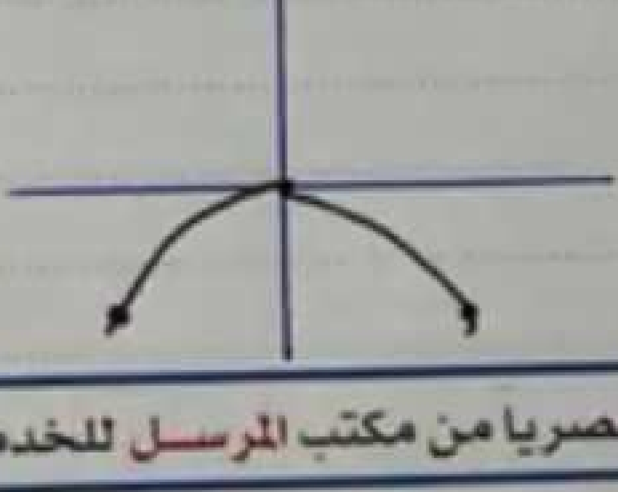
③ التناظر حول محور الصادات الموجب $(x, y)\ (-x, y)$

$$x^2 = 4py$$



④ التناظر حول محور الصادات السالب $(x, -y)\ (-x, -y)$

$$x^2 = -4py$$



س ⑦ جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2,4),(2,-4)$ ورأسه نقطة الاصل.

الحل :- النقطتان ⇐ متناظرتان حول محور السينات الموجب

$(2,4)$ تحقق المعادلة

$$y^2=4px$$

$$(4)^2=4p(2)$$

$$\frac{16}{8}=\frac{8}{8}p \Rightarrow p=2$$

$$y^2=4(2)x$$

$$y^2=8x$$ معادلة القطع المكافئ

س ⑧ جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(-2,-5),(2,-5)$ ورأسه نقطة الاصل.

الحل //

التناظر حول محور الصادات السالب

$(2,-5)$ تحقق المعادلة

$$x^2=-4py$$

$$(2)^2=-4p(-5)$$

$$\frac{4}{20}=\frac{20}{20}p \Rightarrow p=\frac{1}{5}$$

$$x^2=-4\left(\frac{1}{5}\right)y$$

$$x^2=-\frac{4}{5}y$$

س ⑨ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

الحل // التناظر حول محور السينات الموجب

$(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ تحقق المعادلة

$$y^2 = 4px$$

$$(\sqrt{2})^2 = 4p(2\sqrt{2})$$

$$\frac{2}{8\sqrt{2}} = \frac{\cancel{8\sqrt{2}}\, p}{\cancel{8\sqrt{2}}} \Rightarrow p = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$y^2 = \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}\sqrt{2}}\, x$$

$$y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, x$$ معادلة القطع المكافئ

س ⑩ وزاري 2006 دور ①

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(3,6)$ $(-3,6)$ ثم جد معادلة الدليل

س ⑪

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(2,1)$ $(-2,1)$

ملاحظة ③ اذا مر دليل القطع المكافئ بالنقطة (a, b) وكانت بؤرته :

معادلة الدليل

① تنتمي لمحور السينات فأن $x=a$

② 〃 الصادات فأن $y=b$

③ اذا لم يحدد موقع البؤرة فنأخذ الاحتمالين

$x=a$ ، $y=b$

س⑫ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر دليل القطع المكافئ بالنقطة $(3,-5)$

الاحتمال الاول	الاحتمال الثاني
بؤرته ∋ محور x	بؤرته ∋ محور y
معادلة الدليل $x=3$	معادلة الدليل $y=-5$
$P=3$	$P=5$
$y^2=-4Px$	$x^2=4Py$
$y^2=-4(3)x$	$x^2=4(5)y$
$y^2=-12x$	$x^2=20y$

س ـ 13

اذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(-3,4)$ والرأس في نقطة الاصل جد معادلته علماً ان بؤرته تنتمي لأحد المحورين الاحداثيين.

الاحتمال الثاني	الاحتمال الاول
بؤرته ∋ محور y	بؤرته ∋ محور x
معادلة الدليل $y=4$	معادلة الدليل $x=-3$
$P=4$	$P=3$
$x^2=-4Py$	$y^2=4Px$
$x^2=-4(4)y$	$y^2=4(3)x$
$x^2=-16y$	$y^2=12x$

س ـ 14

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر دليله بالنقطة $(-4,8)$

وزاري 2018 دور③ تطبيقي

س⑮ قطع مكافئ معادلته $\frac{1}{4}y^2 = hx$ دليله يمر بالنقطة $(-6,3)$ جد (h)

الحل :- معادلة الدليل $x=-6$
لان بؤرته ∋ محور السينات

$P=6$

$\frac{1}{4}y^2=hx \,\Big]\cdot 4$

$y^2=4hx \quad \ldots ①$

$y^2=4Px$

$y^2=4(6)x$

$y^2=24x \quad \ldots ②$

بالمقارنة ① مع ② نحصل على

$\frac{\cancel{4}h}{\cancel{4}}=\frac{24}{4}$

$h=6$

اثرائيات القطع المكافئ

س 16 القطع المكافئ $y^2+4ax-12x=0$ رأسه نقطة الأصل ودليلة يمر من النقطة $(-3,5)$ جد قيمة a.

الحل // بؤرته ∈ محور السينات

$x=-3$

$P=3$

$y^2+4ax-12x=0$

$y^2=12x-4ax$

$y^2=(12-4a)x \quad \cdots ①$

$y^2=4Px$

بمقارنه ① مع ②

$y^2=12x \quad \cdots ②$

$12=12-4a$

$4a=12-12$

$\frac{\cancel{4}a}{\cancel{4}}=\frac{0}{4} \Rightarrow a=0$

س 17 اذا كان دليل القطع المكافئ $y^2=(7h-9)x$ يمر بالنقطة $(-3,-1)$ جد قيمة h.

الجواب ⇐ $h=3$

موبايل : 07805330465

س 18) قطع مكافئ معادلته $Ax^2+8y=0$ يمر بالنقطة $(1,2)$ جد قيمة A ثم جد بؤرته ودليله وارسم القطع

الحل // $\overset{x}{1},\overset{y}{2}$ $(1,2)$ تحقق المعادله ⇐ $Ax^2+8y=0$

$$A(1)^2+8(2)=0$$

$$A=-16$$

$$-16x^2+8y=0 \Rightarrow \frac{\cancel{-16}x^2}{\cancel{-16}}=\frac{-8y}{-16}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2=\frac{1}{2}y \\ x^2=4py \end{array}\right\}$$ بالمقارنة

بؤرته ∋ محور الصادات ⊕

$$\frac{\cancel{4}p}{\cancel{4}}=\frac{1}{2\cdot 4} \Rightarrow p=\frac{1}{8}$$

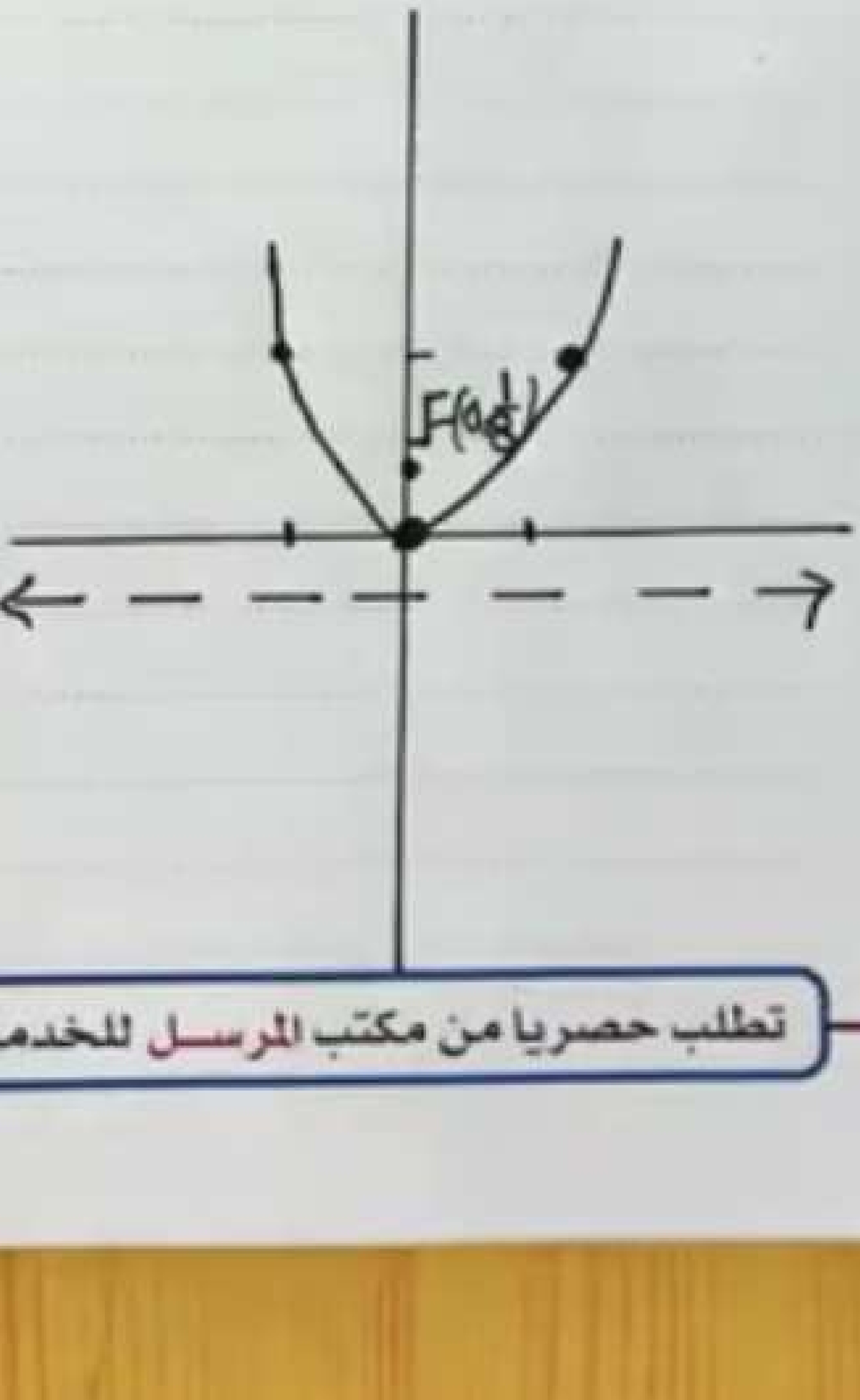
البؤرة $F(0,\frac{1}{8})$

الدليل $y=-\frac{1}{8}$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{y}$$

x	y
0	0
±1	2

$y=-\frac{1}{8}$



وزاري 2011 دور ①

س ⑲ جد قيمة A و بؤرة ودليل القطع المكافئ الذي معادلته $Ax^2+8y=0$ المار بالنقطة $(2,1)$

موبايل : 07805330465

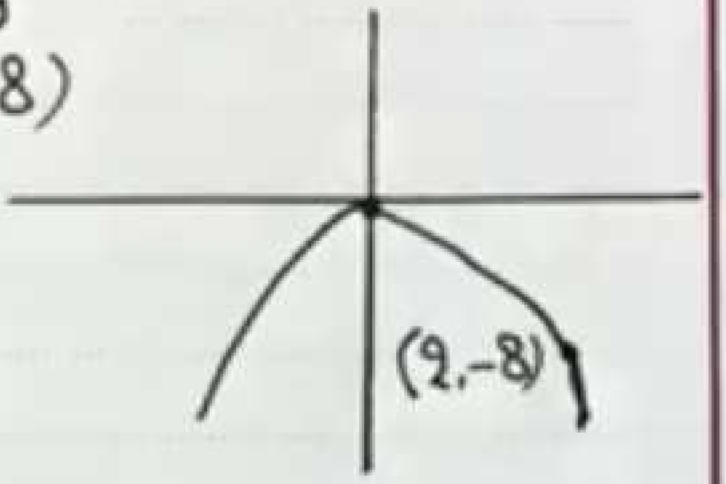
الوصول - الى - 100

اثرائي مهم

س ⑳ جد معادلة القطع المكافئ المار من النقطة $(2,-8)$ ورأسه نقطة الاصل و بؤرته $\left(0,\frac{2-a}{3}\right)$ ثم جد قيمة a.

الحل // بؤرته ∋ محور الصادات السالب

$x^2=-4py$ تحقق المعادلة $\overset{x}{(2},\overset{y}{-8)}$



$(2)^2=-4p(-8)$

$\frac{4}{32}=\frac{\cancel{32}p}{\cancel{32}}$

$p=\frac{1}{8} \Rightarrow F\left(0,-\frac{1}{8}\right)$ البؤرة

$x^2=-4\cdot\frac{1}{8}y$

$x^2=-\frac{1}{2}y$ المعادلة

$F\left(0,-\frac{1}{8}\right)$

$F\left(0,\frac{2-a}{3}\right)$

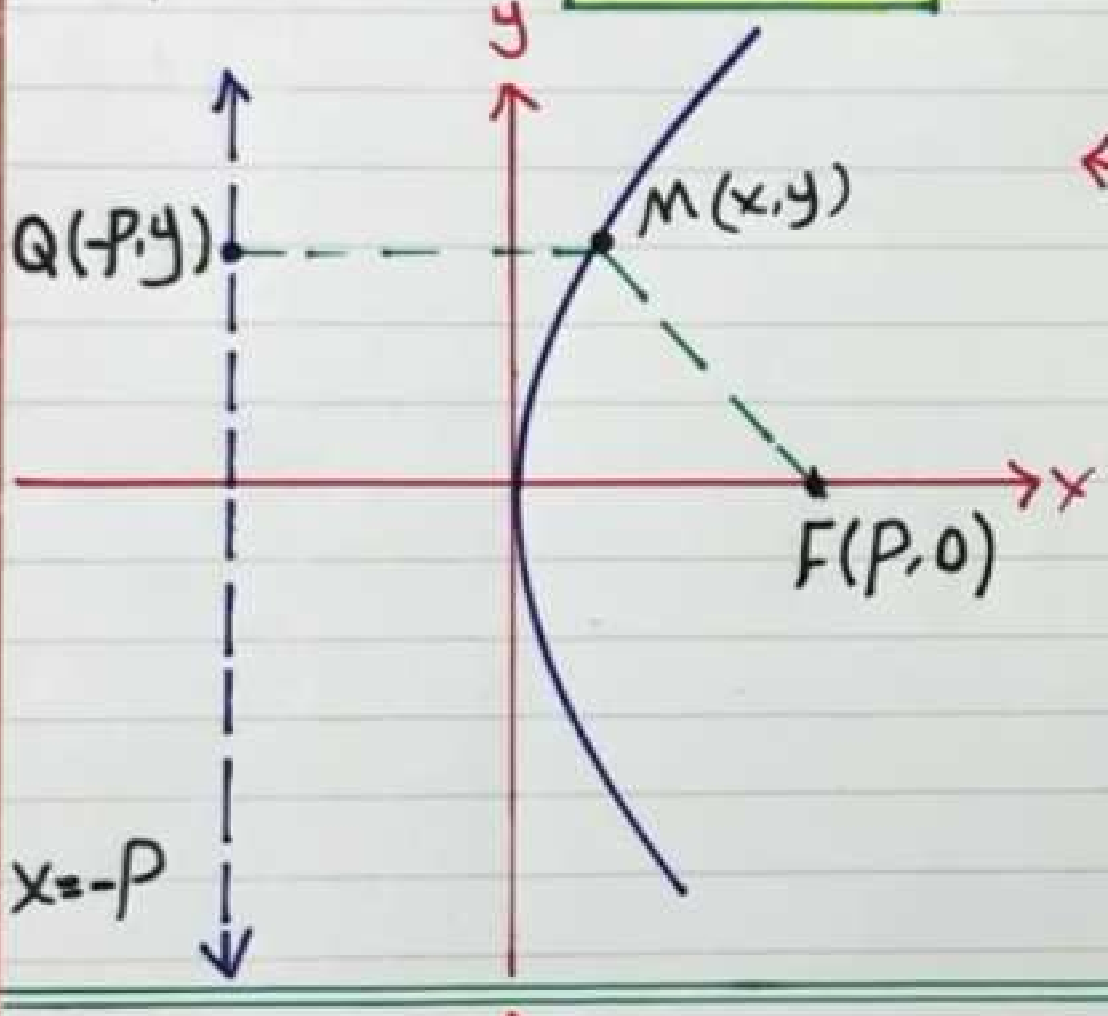
$-\frac{1}{8} = \frac{2-a}{3}$

$-3=16-8a \Rightarrow 8a=16+3$

$\frac{\cancel{8}a}{\cancel{8}}=\frac{19}{8} \Rightarrow a=\frac{19}{8}$

* تعريف القطع المكافئ :

القطع المكافئ هو مجموعة النقط $M(x,y)$ في المستوي والتي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة $F(P,0)$ تسمى البؤرة $P>0$ مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم "D" يسمى الدليل لا يحوي البؤرة . اي ان $\boxed{MF=MQ}$



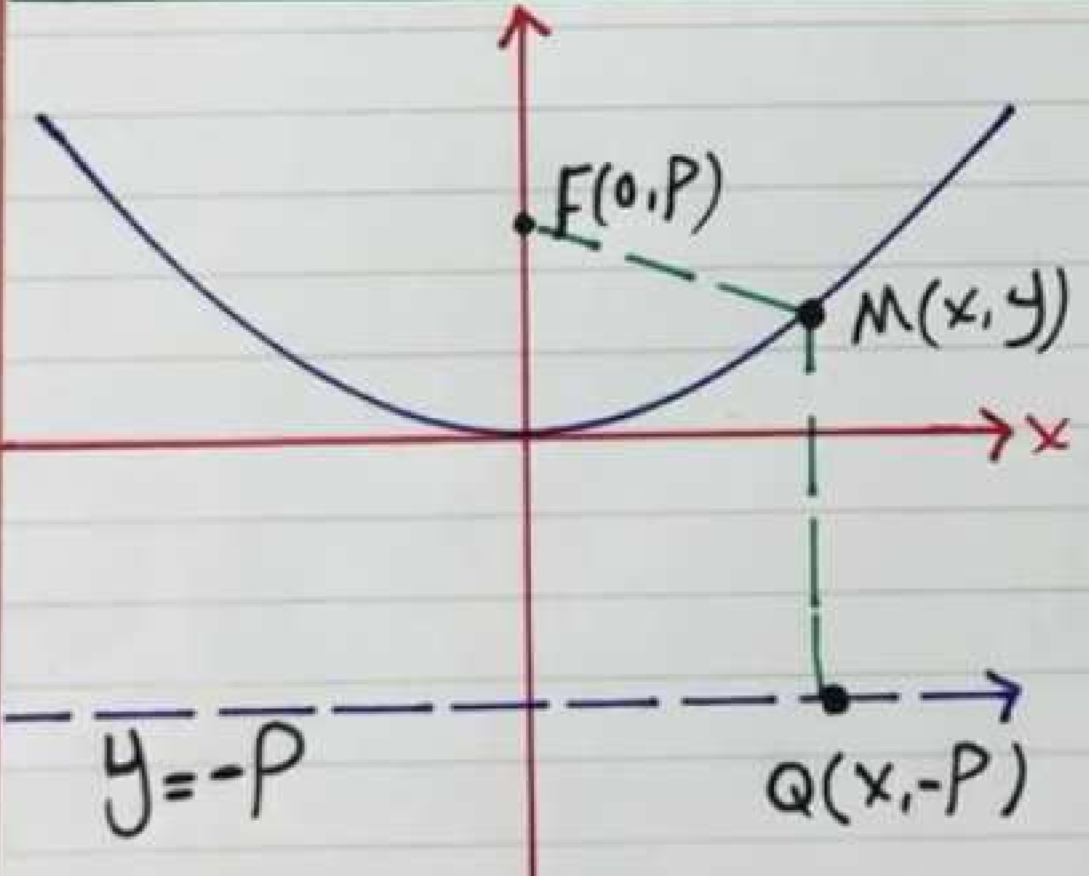
بؤرته ∈ محور السينات ←

النقطة $M(x,y)$

البؤرة $F(P,0)$

نقطة على الدليل $Q(-P,y)$

بؤرته ∈ محور الصادات ←



النقطة $M(x,y)$

البؤرة $F(0,P)$

نقطة على الدليل $Q(x,-P)$

س 21 باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ اذا علم ان بؤرته $(\sqrt{3},0)$ والرأس في نقطة الاصل.

الحل //

$$F(\sqrt{3},0),\quad M(\overset{x_2}{x},\overset{y_2}{y})\quad Q(-\sqrt{3},y)$$

$$MF=MQ \qquad S=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+\sqrt{3})^2+\cancel{(y-y)^2}}$$

$$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2}=\sqrt{(x+\sqrt{3})^2}$$ بتربيع الطرفين

$$(x-\sqrt{3})^2+y^2=(x+\sqrt{3})^2$$

$$\cancel{x^2}-2\sqrt{3}x\cancel{+3}+y^2=\cancel{x^2}+2\sqrt{3}x\cancel{+3}$$

$$y^2=2\sqrt{3}x+2\sqrt{3}x$$

$$y^2=4\sqrt{3}x$$ معادلة القطع المكافئ

تحقيق الحل ⇐ $F(\sqrt{3},0)$ $\quad P=\sqrt{3}$

$$y^2=4Px$$

$$y^2=4\sqrt{3}x$$

مهم

س ㉓ باستخدام التعريف. جد معادلة القطع المكافئ اذا علمت ان معادلة الدليل $y=\sqrt{3}$. والرأس نقطة الاصل.

الحل //

$F(\overset{x_1}{0},\overset{y_1}{-\sqrt{3}})\ ,\ M(\overset{x_2}{x},\overset{y_2}{y})\quad Q(\overset{x_1}{x},\overset{y_1}{\sqrt{3}})$

$MF=MQ \qquad S=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$\sqrt{(x-0)^2+(y+\sqrt{3})^2}=\sqrt{\cancel{(x-x)^2}+(y-\sqrt{3})^2}$

$\sqrt{x^2+(y+\sqrt{3})^2}=\sqrt{(y-\sqrt{3})^2}$ بتربيع الطرفين

$x^2+(y+\sqrt{3})^2=(y-\sqrt{3})^2$

$x^2+\cancel{y^2}+2\sqrt{3}y+\cancel{3}=\cancel{y^2}-2\sqrt{3}y+\cancel{3}$

$x^2=-2\sqrt{3}y-2\sqrt{3}y$

$x^2=-4\sqrt{3}y$ معادلة القطع المكافئ

س ㉔ باستخدام التعريف. جد معادلة القطع المكافئ اذا علمت ان بؤرته $F(0,3)$ ورأسه نقطة الاصل.

إنسحاب المحاور للقطع المكافئ

* بؤرته ∋ لمحور السينات ورأسه نقطة الاصل $O(0,0)$

	بؤرته ∋ لمحور السينات ⊕	بؤرته ∋ لمحور السينات ⊖
المعادلة	$y^2=4Px$	$y^2=-4Px$
البؤرة	$F(P,0)$	$F(-P,0)$
معادلة الدليل	$x=-P$	$x=P$

* بؤرته ∋ لمحور السينات ورأسه النقطة $\bar{O}(h,K)$

	بؤرته ∋ لمحور السينات ⊕	بؤرته ∋ لمحور السينات ⊖
المعادلة	$(y-K)^2=4P(x-h)$	$(y-K)^2=-4P(x-h)$
البؤرة	$F(P+h,K)$	$F(-P+h,K)$
الدليل	$x=-P+h$	$x=P+h$
معادلة المحور	$y=K$	$y=K$

* بؤرته ∈ لمحور الصادات ورأسه نقطة الاصل $O(0,0)$

	بؤرته ∈ لمحور الصادات ⊕	بؤرته ∈ لمحور الصادات ⊖
المعادلة	$x^2=4py$	$x^2=-4py$
البؤرة	$F(\overset{x}{0},\overset{y}{p})$	$F(\overset{x}{0},\overset{y}{-p})$
الدليل	$y=-p$	$y=p$

* بؤرته ∈ لمحور الصادات ورأسه النقطة $\bar{O}(h,k)$

	بؤرته ∈ لمحور الصادات ⊕	بؤرته ∈ لمحور الصادات ⊖
المعادلة	$(x-h)^2=4p(y-k)$	$(x-h)^2=-4p(y-k)$
البؤرة	$F(h,p+k)$	$F(h,-p+k)$
الدليل	$y=-p+k$	$y=p+k$
معادلة المحور	$x=h$	$x=h$

س ㉕ من معادلة القطع المكافئ $(y+1)^2 = 4(x-2)$

جين الرأس ، البؤرة ، معادلة الدليل ، معادلة المحور.

$(y+1)^2 = 4(x-2)$ بؤرته ∋ محور السينات ⊕

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

الرأس $\bar{o}(h,k) = (2,-1)$

$4p = 4 \Rightarrow p = 1$

البؤرة $F(p+h, k) \Rightarrow F(1+2, -1) \Rightarrow F(3,-1)$

معادلة الدليل $x = -p+h \Rightarrow x = -1+2 \Rightarrow x = 1$

معادلة المحور $y = k \Rightarrow y = -1$

س ㉖ من معادلة القطع المكافئ $(y-2)^2 = -8(x-3)$

عين الرأس ، البؤرة ، معادلة الدليل ، معادلة المحور

س 27 من معادلة القطع المكافئ: $(x+4)^2=-8(y-2)$

عين الرأس، البؤرة، معادلة الدليل، معادلة المحور

الحل //

بؤرته ∋ محور الصادات ⊖

$(x+4)^2=-8(y-2)$

$(x-h)^2=-4P(y-k)$

الرأس $\bar{o}(h,k)=(-4,2)$

$4P=8 \Rightarrow P=2$

البؤرة $F(h,-P+k) \Rightarrow F(-4,-2+2) \Rightarrow F(-4,0)$

معادلة الدليل $y=P+k \Rightarrow y=2+2 \Rightarrow y=4$

معادلة المحور $x=h \Rightarrow x=-4$

س 28 من معادلة القطع المكافئ: $(x-1)^2=8(y-1)$

عين الرأس، البؤرة، معادلة الدليل، معادلة المحور

س 29 من معادلة القطع المكافئ: $y^2+4y+2x=-6$

جد الرأس، البؤرة، معادلة الدليل، معادلة المحور

الحل //

$$y^2+4y+2x=-6$$

$$y^2+4y=-2x-6$$

نضيف للطرفين $\left(\frac{1}{2}\text{ معامل } y\right)^2$

$$y^2+4y+4=-2x-6+4$$

$$(y+2)^2=-2x-2$$

$$(y+2)^2=-2(x+1)$$

بؤرته ت محور السينات ⊖

$$(y-k)^2=-4p(x-h)$$

$$\bar{o}(h,k)=(-1,-2)$$

$$\frac{\cancel{4}p}{\cancel{4}}=\frac{2}{4} \rightsquigarrow p=\frac{1}{2}$$

$$F(-p+h,k) \Rightarrow F\left(-\frac{1}{2}+-1,-2\right)$$

البؤرة $F\left(-\frac{3}{2},-2\right)$

الدليل $x=p+h \Rightarrow x=\frac{1}{2}-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

معادلة المحور $y=k \Rightarrow y=-2$

س 30 من معادلة القطع المكافئ : $x^2+6x-y=0$
جد الرأس ، البؤرة ، معادلة الدليل ، معادلة المحور.

$x^2+6x=y$ نضيف للطرفين $\left(\frac{1}{2}\text{ معامل } x\right)^2$

$x^2+6x+9=y+9$

$(x+3)^2=1(y+9)$ بؤرته ∈ محور الصادات ⊕

$(x-h)^2=4P(y-K)$

$\bar{o}(h,K) \Rightarrow o(-3,-9)$

$4P=1 \Rightarrow P=\frac{1}{4}$

$F(h,P+K) \Rightarrow F(-3,\frac{1}{4}-9) \Rightarrow F(-3,\frac{-35}{4})$

معادلة الدليل $y=-P+K \Rightarrow y=-\frac{1}{4}-9 \Rightarrow y=\frac{-37}{4}$

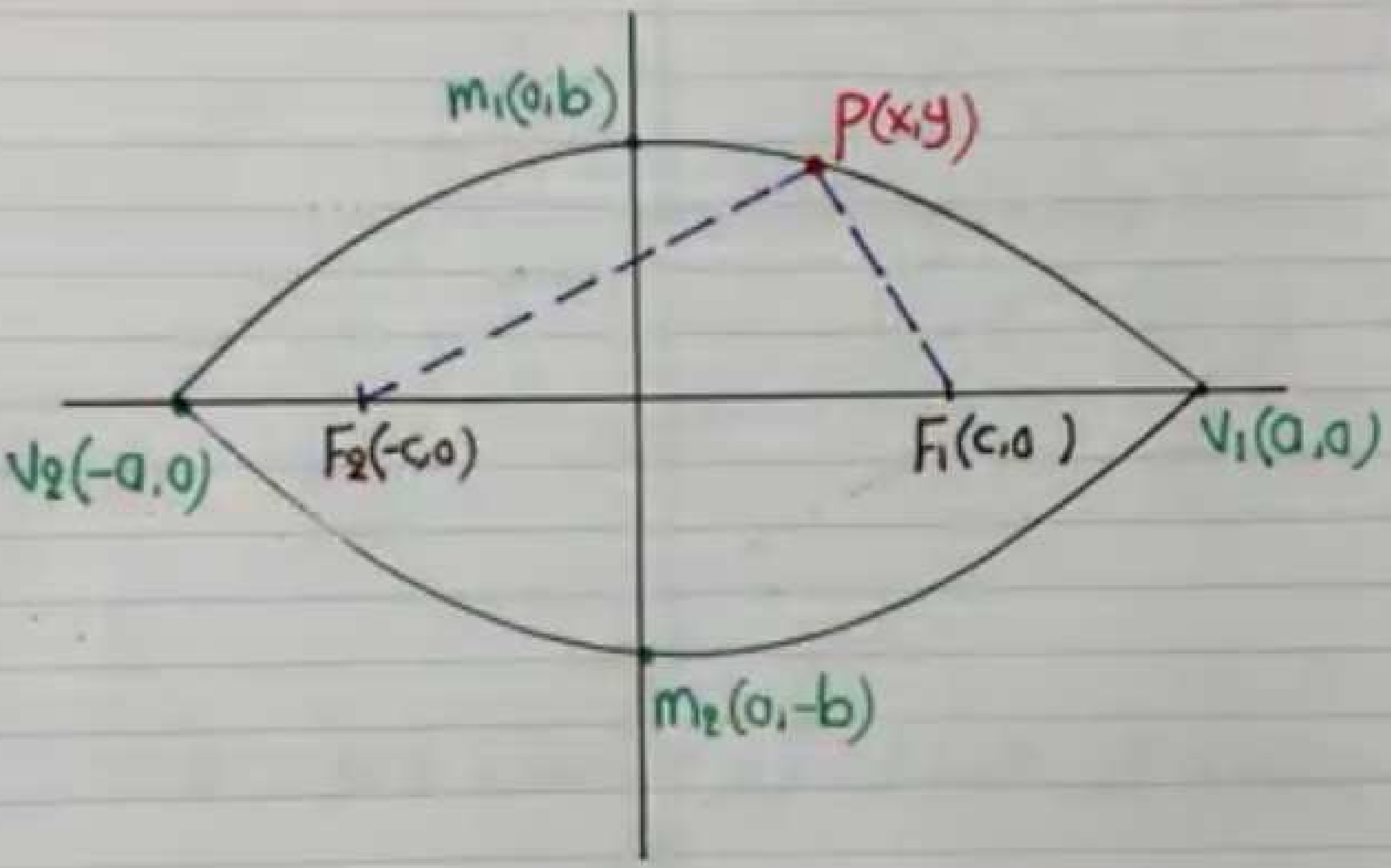
معادلة المحور $x=h \Rightarrow x=-3$

وزاري 2017 دور 2	س 31 من معادلة القطع المكافئ : $8y+7=x^2+2x$ جد احداثي البؤرة والرأس ومعادلتي الدليل والمحور

" القطع الناقص "

تعريف //

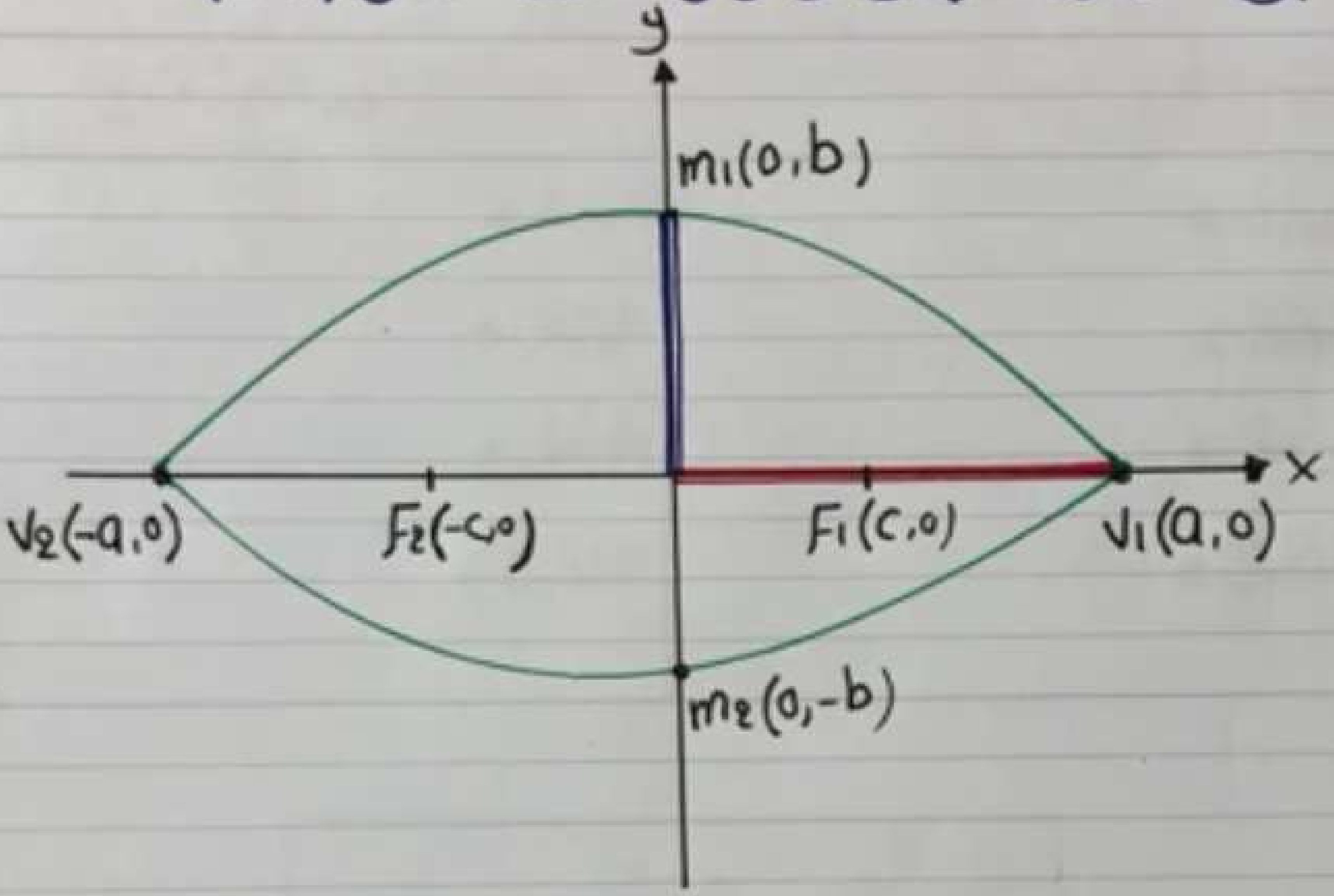
القطع الناقص مجموعة من النقط في المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين "البؤرتان" يساوي عدد ثابت.



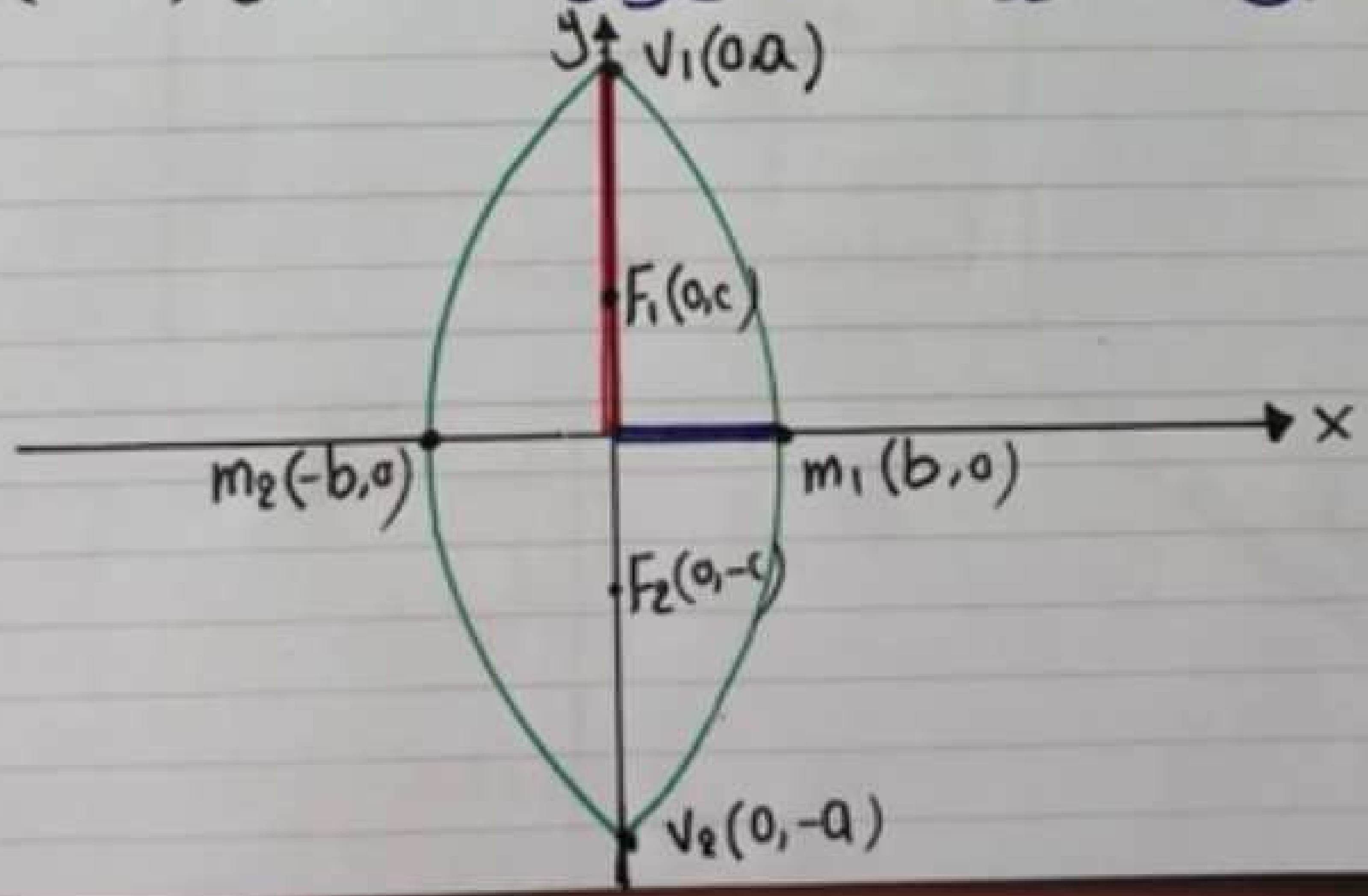
اي ان $\Leftarrow$ $\boxed{PF_1 + PF_2 = 2a}$

العدد الثابت

- بؤرتاه ∋ محور السينات ومركزه نقطة الاصل (0,0)



- بؤرتاه ∋ محور الصادات ومركزه نقطة الاصل (0,0)



حفظ + فهم

بؤرتاه ∋ لمحور الصادات y	بؤرتاه ∋ لمحور السينات x
العادله ← $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	العادله ← $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
البؤرتان ← $F_1(0,c)$ $F_2(0,-c)$	البؤرتان ← $F_1(c,0)$ $F_2(-c,0)$
الرأسان ← $V_1(0,a)$ $V_2(0,-a)$	الرأسان ← $V_1(a,0)$ $V_2(-a,0)$
القطبان ← $m_1(b,0)$ $m_2(-b,0)$	القطبان ← $m_1(0,b)$ $m_2(0,-b)$

طول المحور الكبير = $2a$

طول المحور الصغير = $2b$

المسافة بين البؤرتين = $2c$

المساحة ← $A=ab\pi$	المفتاح
المحيط ← $P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$	$c^2=a^2-b^2$
الاختلاف المركزي ← $e=\frac{c}{a}<1$	

س ①
قطع ناقص معادلته $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ جد احداثيات رأسيه و بؤرتيه و قطبيه وطول كل من محوريه و المسافه بين بؤرتيه ومقدار اختلافه المركزي ثم استخرج مساحته ومحيطه.

الحل // بؤرتاه ∈ محور السينات $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$a^2=25 \Rightarrow a=5$$
$$b^2=16 \Rightarrow b=4$$
$$c^2=a^2-b^2=25-16=9 \Rightarrow c=3$$

الرأسان $V_1(5,0)\quad V_2(-5,0)$

البؤرتان $F_1(3,0)\quad F_2(-3,0)$

القطبان $M_1(0,4)\quad M_2(0,-4)$

طول المحور الكبير $2a=10$

طول المحور الصغير $2b=8$

المسافه بين بؤرتيه $2c=6$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}<1$

المساحة $A=ab\pi=(5)(4)\pi=20\pi$ وحدة مربعة

المحيط $P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{25+16}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{41}{2}}$ وحدة

س② جد كل من البؤرتين والرأسين والقطبين وطول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة الاتية:

① $9x^2+13y^2=117 \;]\div 117$

الحل //

$$\frac{9x^2}{117}+\frac{13y^2}{117}=1$$

$$\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$$

بؤرتاه ∋ محور السينات

$a^2=13 \rightsquigarrow a=\sqrt{13}$

$b^2=9 \rightsquigarrow b=3$

$c^2=a^2-b^2=13-9=4 \rightsquigarrow c=2$

$F_1(2,0)\quad F_2(-2,0)$ البؤرتان

$V_1(\sqrt{13},0)\quad V_2(-\sqrt{13},0)$ الرأسان

$M_1(0,3)\quad M_2(0,-3)$ القطبان

$2a=2\sqrt{13}$ طول المحور الكبير

$2b=6$ طول المحور الصغير

$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{13}}$ الاختلاف المركزي

② $25x^2+9y^2=225$ واجب بيتي

③ $4x^2+3y^2=\frac{4}{3} \Big] \cdot \frac{3}{4}$ بؤرتاه ∋ محور الصادات

$\frac{1\times3}{3\times3} < \frac{4}{9}$

$\frac{3}{9} < \frac{4}{9}$

$\frac{3x^2}{1}+\frac{9y^2}{4}=1$

$\frac{x^2}{\frac{1}{3}}+\frac{y^2}{\frac{4}{9}}=1$

$a^2=\frac{4}{9} \rightsquigarrow \boxed{a=\frac{2}{3}}$

$b^2=\frac{1}{3} \rightsquigarrow \boxed{b=\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$c^2=a^2-b^2=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}$

$=\frac{4-3}{9}=\frac{1}{9} \rightsquigarrow \boxed{c=\frac{1}{3}}$

$F_1(0,\frac{1}{3})$ $F_2(0,-\frac{1}{3})$ البؤرتان

$V_1(0,\frac{2}{3})$ $V_2(0,-\frac{2}{3})$ الرأسان

$M_1(\frac{1}{\sqrt{3}},0)$ $M_2(-\frac{1}{\sqrt{3}},0)$ القطبان

$2a=\frac{4}{3}$ طول المحور الكبير , $2b=\frac{2}{\sqrt{3}}$ طول المحور الصغير

$e=\frac{c}{a}=\frac{1/3}{2/3}=\frac{1}{2}<1$ الاختلاف المركزي

④ $x^2+2y^2=1$

س③ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(3,0)$ $F_2(-3,0)$ ورأساه $V_1(5,0)$ $V_2(-5,0)$ ومركزه نقطة الاصل.

الحل// البؤرتان ∋ محور السينات

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$c=3 \Rightarrow c^2=9$

$a=5 \Rightarrow a^2=25$

$c^2=a^2-b^2$

$9=25-b^2$

$b^2=25-9 \Rightarrow b^2=16$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$ معادلة القطع الناقص

س④ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(5,0)$ $(-5,0)$ وطول محوره الكبير يساوي (12) وحدة

البؤرتان ∋ محور السينات

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$c=5 \Rightarrow c^2=25$

$2a=12 \Rightarrow a=6 \Rightarrow a^2=36$

$c^2=a^2-b^2$

$25=36-b^2 \Rightarrow b^2=36-25 \Rightarrow b^2=11$

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$$ معادلة القطع الناقص

س⑤ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحداثي بؤرتاه $F_1(0,10)$ $F_2(0,-10)$ واحداثي قطباه $M_1(3,0)$ $M_2(-3,0)$

س6 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات ومن محور الصادات جزءاً طوله (12) وحدة ثم جد مساحة منطقته و محيطه.

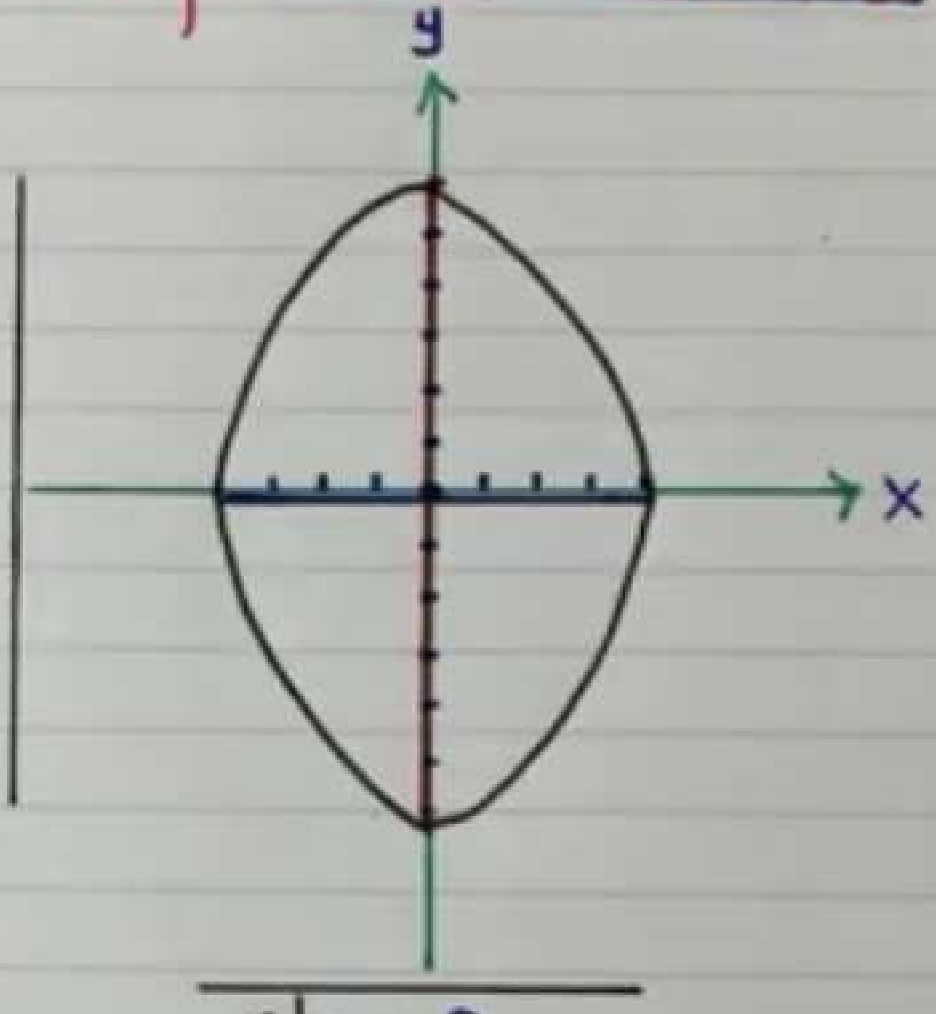
$\frac{2a}{2}=\frac{12}{2}$

$a=6 \Rightarrow a^2=36$

$\frac{2b}{2}=\frac{8}{2}$

$b=4 \Rightarrow b^2=16$

$2a=12$



$2b=8$

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$ معادلة القطع الناقص

$A=ab\pi=(6)(4)\pi=24\pi$ وحدة مربعة

$P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{52}{2}}$

$=2\pi\sqrt{26}$ وحدة

وزاري 2012 دور ② مصر

س ⑦

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله 8 وحدات ومساحة منطقته 24π وحدة مساحة ؟

الحل //

$$A = ab\pi$$

$$24\cancel{\pi} = ab\cancel{\pi} \Rightarrow ab = 24$$

$2a = 8$ او $2b = 8$

الاحتمال الاول

$$\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} = \frac{8}{2} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow \frac{\cancel{4}b}{\cancel{4}} = \frac{24}{4} \Rightarrow b = 6$$ يهمل

الاحتمال الثاني

$$\frac{2b}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow \frac{\cancel{4}a}{\cancel{4}} = \frac{24}{4} \Rightarrow a = 6$$

∴ الجزء المقطوع $2b = 8$ من محور السينات

∴ البؤرتان والرأسان على محور الصادات

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$ معادلة القطع الناقص

الملاحظات الاهمية للقطع الناقص

① يقطع من محور الصادات جزءاً طوله ـــ وحدات
" " السينات " " ـــ " "

نحصل على 2a او 2b

الجزء المقطوع الاكبر = 2a والجزء المقطوع الاصغر = 2b

② الفرق بين طولي محوريه ⇐ عدد موجب = 2a − 2b

مجموع طولي محوريه ⇐ عدد موجب = 2a + 2b

مجموع مربعي طولي محوريه ⇐

③ قطع ناقص احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ

$$F(P,0) = F(c,0)$$

س ⑩

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير (10) وحدات

القطع المكافئ	$y^2 = 12x$
	$y^2 = 4Px$
	$4P = 12 \Rightarrow P = 3$
البؤرة	$F(3,0)$

القطع الناقص $F(3,0)$ احدى بؤرتيه

$c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$

$2b = 10 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow b^2 = 25$

$c^2 = a^2 - b^2$

$9 = a^2 - 25$

$9 + 25 = a^2 \Rightarrow a^2 = 34$

بؤرتاه ∋ لمحور X

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

معادلة القطع الناقص

$$\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$$

وزاري 2014 تمهيدي

س ⑪

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير (8) وحدات.

س ١٢ — جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2=24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة

القطع المكافئ $x^2=24y$

$x^2=4py$

$4p=24 \Rightarrow p=6$

البؤرة $F(0,6)$

القطع الناقص $F(0,6)$ احدى بؤرتيه $c=6 \Rightarrow c^2=36$

$$2a+2b=36 \;]\div 2$$

$$a+b=18 \Rightarrow a=18-b \quad \cdots (1)$$

$$c^2=a^2-b^2$$

$$36=(18-b)^2-b^2$$

$$36=324-36b+\cancel{b^2}-\cancel{b^2}$$

$$36b=324-36 \Rightarrow \frac{\cancel{36}b}{\cancel{36}}=\frac{288}{36} \Rightarrow b=8$$

$$a=10 \Rightarrow a^2=100 \;,\; b^2=64$$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$

س ١٣ — جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2=24y$ والفرق بين طولي محوريه يساوي (4) وحدات

الملاحظات الذهبية للقطع الناقص

① يقطع من محور الصادات جزءاً طوله ⟸ وحدات
〃 〃 السينات 〃 〃 ⟸ 〃

نحصل على $2a$ او $2b$

الجزء المقطوع الاكبر $= 2a$ و الجزء المقطوع الاصغر $= 2b$

② الفرق بين طولي محوريه ⟸ $2a - 2b =$ عدد موجب

مجموع طولي محوريه ⟸ $2a + 2b =$ عدد موجب

مجموع مربعي طولي محوريه ⟸

③ قطع ناقص احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ

محور x ⟸ $F(P,0) = F(c,0)$

محور y ⟸ $F(0,P) = F(0,c)$

④ قطع ناقص ⟸ يتقاطع / يمر / يمس ⟸ $(x,0)$ ⟸ a او $(0,y)$ ⟸ b نحصل على

توضيح

اذا كانت النقطة $(x,0)$ $(0,y)$ والبؤره F نفس المسقط ⟸ a

واذا كانت النقطة $(x,0)$ $(0,y)$ عكس مسقط البؤرة F ⟸ b

وزاري

س ⑭

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل وبؤرتاه $(0,\pm2)$. ويتقاطع مع محور السينات عند $x=\pm4$

الحل // البؤرتان ∋ لمحور الصادات $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$F(0,\pm2) \rightsquigarrow c=2 \rightsquigarrow c^2=4$

التقاطع مع محور السينات $y=0 \;,\; x=\pm4$

$m(\pm4,0) \rightsquigarrow b=4 \rightsquigarrow b^2=16$

$c^2=a^2-b^2$

$4=a^2-16$

$4+16=a^2 \rightsquigarrow a^2=20$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{20}=1$

س ⑮

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل وبؤرتاه $(\pm4,0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x=\pm6$

وزاري 2018 دور 3 احيائي

س16 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه (0,6) ويمس دليل القطع المكافئ $y^2=-12x$

الحل //

القطع المكافئ

بؤرته ∋ لمحور السينات

$y^2=-12x$

$y^2=-4px$

$\frac{\cancel{4}p}{\cancel{4}}=\frac{12}{4} \rightsquigarrow p=3$

معادلة دليل القطع المكافئ $x=3$

القطع الناقص

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$F(0,6) \rightsquigarrow c=6 \rightsquigarrow c^2=36$

$b=3 \rightsquigarrow b^2=9$

$c^2=a^2-b^2$

$36=a^2-9 \rightsquigarrow a^2=36+9 \rightsquigarrow a^2=45$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{45}=1$

مهم جداً"

س 17 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2=12x$.

المنحني $x^2+y^2-3x=16$	القطع المكافئ $y^2=12x$
التقاطع مع محور الصادات $x=0$	$y^2=4px$
$y^2=16 \rightarrow y=\pm 4$	$\frac{4p}{4}=\frac{12}{4} \rightarrow p=3$
$(0,-4)\ (0,4)$	الدليل $x=-3$

القطع الناقص

$y \rightarrow$

$F_1(0,4)\quad F_2(0,-4)$

$c=4 \rightarrow c^2=16$

$b=3 \rightarrow b^2=9$

$c^2=a^2-b^2$

$16=a^2-9 \rightarrow a^2=16+9 \rightarrow a^2=25$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

وزاري 2018 دور ① تطبيقي

س ⑱

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2-24y=0$ ويمر من نقطتي تقاطع المنحني $x^2+y^2-16y-64=0$ مع محور السينات.

وزاري 2014 تمهيدي دور ②
2017 تمهيدي احيائي/تطبيقي

س 19 — جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2+8x=0$ علماً بأن القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

الحل //

القطع المكافئ

$y^2=-8x$

$y^2=-4Px$

$4P=8 \rightsquigarrow P=2$

$F(-2,0)$

القطع الناقص

$F(-2,0) \rightsquigarrow c=2 \rightsquigarrow c^2=4$

$c^2=a^2-b^2$

$4=a^2-b^2$

$b^2+4=a^2 \quad \dots ①$

البؤرتان ∋ محور X

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ تحقق المعادلة

$\frac{(2\sqrt{3})^2}{b^2+4}+\frac{(\sqrt{3})^2}{b^2}=1$

$\frac{12}{b^2+4}+\frac{3}{b^2}=1$

$$\frac{12b^2+3(b^2+4)}{(b^2+4)\,b^2}=1$$

$$\frac{12b^2+3b^2+12}{b^4+4b^2}=1$$

$$\frac{15b^2+12}{b^4+4b^2}=\frac{1}{1}$$

$$b^4+4b^2=15b^2+12$$

$$b^4+4b^2-15b^2-12=0$$

$$b^4-11b^2-12=0$$

$$(b^2-12)(b^2+1)=0$$

اما $b^2+1=0 \Rightarrow b^2=-1$ يهمل

او $b^2-12=0 \Rightarrow b^2=12 \Rightarrow a^2=16$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$ معادلة القطع الناقص

س ⑳ جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2=8x$ والمار من النقطة $(-2,3)$.

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

س 21 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين (6,2) (3,4).

الحل !! البؤرتان $\in$ محور x $\Leftarrow$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(6, 2) تحقق المعادلة

$$\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \quad \cdots ①$$

(3,4)

$$\left.\frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \quad \cdots ②\right] \cdot -4$$

$$\frac{\cancel{36}}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \quad \cdots ①$$

$$-\frac{\cancel{36}}{\cancel{a^2}}-\frac{64}{b^2}=-4 \quad \cdots ②$$

$$-\frac{60}{b^2}=\frac{-3}{1} \Rightarrow \frac{\cancel{-3}b^2}{\cancel{-3}}=\frac{-60}{-3} \Rightarrow \boxed{b^2=20}$$

نعوض في المعادلة ②

$$\frac{9}{a^2}+\frac{\cancel{16}^{4}}{\cancel{20}_{5}}=1$$

$$\frac{9}{a^2}=1-\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{9}{a^2}=\frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{a^2=45}$$

$$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$$

وزاري 2016 دور 1 خارج

س 22 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين (4,3) ، (6,2) .

$$\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$$

س 23

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ومركزه في نقطة الاصل. وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير. ويقطع القطع المكافئ $y^2+8x=0$ عند النقطة التي احداثيها السيني يساوي (-2).

الحل // القطع المكافئ $x=-2$ $\quad y^2=-8x$

$y^2=-8(-2) \Rightarrow y^2=16 \Rightarrow y=\pm 4 \Rightarrow (-2,-4)(-2,+4)$

القطع الناقص $(-2,-4)$ $(-2,4) \in$ للقطع الناقص

$$\cancel{2}a=\cancel{2}(2b) \Rightarrow a^2=4b^2 \ldots ①$$

$(\overset{x}{-2},\overset{y}{4})$ تحقق المعادله $\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{(-2)^2}{4b^2}+\frac{(4)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{\cancel{4}\,1}{\cancel{4}b^2}+\frac{16}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{17}{b^2}=\frac{1}{1} \Rightarrow b^2=17$$

$$a^2=4(17) \Rightarrow a^2=68$$

معادلة القطع الناقص $\quad \dfrac{x^2}{68}+\dfrac{y^2}{17}=1$

وزاري 2018 خارج

س 24 جد معادلة القطع الناقص الذي تقع بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الاصل والنسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{1}{2}$ ويقطع القطع المكافئ $y^2=8x$ عند $x=2$

الحل // القطع المكافئ $x=2$ $y^2=8x$

$$y^2=8(2) \Rightarrow y^2=16 \Rightarrow y=\pm 4 \Rightarrow (2,-4),(2,4)$$

القطع الناقص $(2,-4),(2,4)$ تنتمي للقطع الناقص

$$\frac{2b}{2a}=\frac{1}{2} \Rightarrow a=2b \Rightarrow a^2=4b^2 \cdots ①$$

$(2,4)$ تحقق المعادلة

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$\frac{(2)^2}{b^2}+\frac{(4)^2}{4b^2}=1$$

$$\frac{4}{b^2}+\frac{16}{4b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{b^2}+\frac{4}{b^2}=1$$

$$\frac{8}{b^2}=\frac{1}{1} \Rightarrow b^2=8$$

$$a^2=4(8) \Rightarrow a^2=32$$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{32}=1$

س 95

جد مساحة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى محور الصادات والذي يقطع القطع المكافئ $x^2+8y=0$ في نقطتين احد احداثيهما الصادي يساوي (2-) والنسبة بين طولي محوري القطع الناقص كنسبة $\frac{1}{2}$

$A=34\pi$
وحدة مربعة

وزاري 2011 دور ②
2018 دور ① احيائي

س ㉖ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات. ومركزه نقطة الاصل ومساحة منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه يساوي 10π وحدة

الحل //

مساحة القطع الناقص $A = a \cdot b \cdot \pi$

$7\cancel{\pi} = a \cdot b \cdot \cancel{\pi} \rightsquigarrow a = \frac{7}{b} \rightsquigarrow a^2 = \frac{49}{b^2} \quad \cdots ①$

$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

بتربيع الطرفين

$\overset{5}{\cancel{10\pi}} = \cancel{2\pi}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \rightsquigarrow 5 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$\frac{25}{1} \times \frac{a^2+b^2}{2} \rightsquigarrow a^2+b^2 = 50 \quad \cdots ②$

نعوض ① في ②

$\frac{49}{b^2} + b^2 = 50 \Big] \cdot b^2$

$49 + b^4 = 50b^2$

$b^4 - 50b^2 + 49 = 0$

$(b^2 - 49)(b^2 - 1) = 0 \Rightarrow b^2 = 49$

او $b^2 = 1$

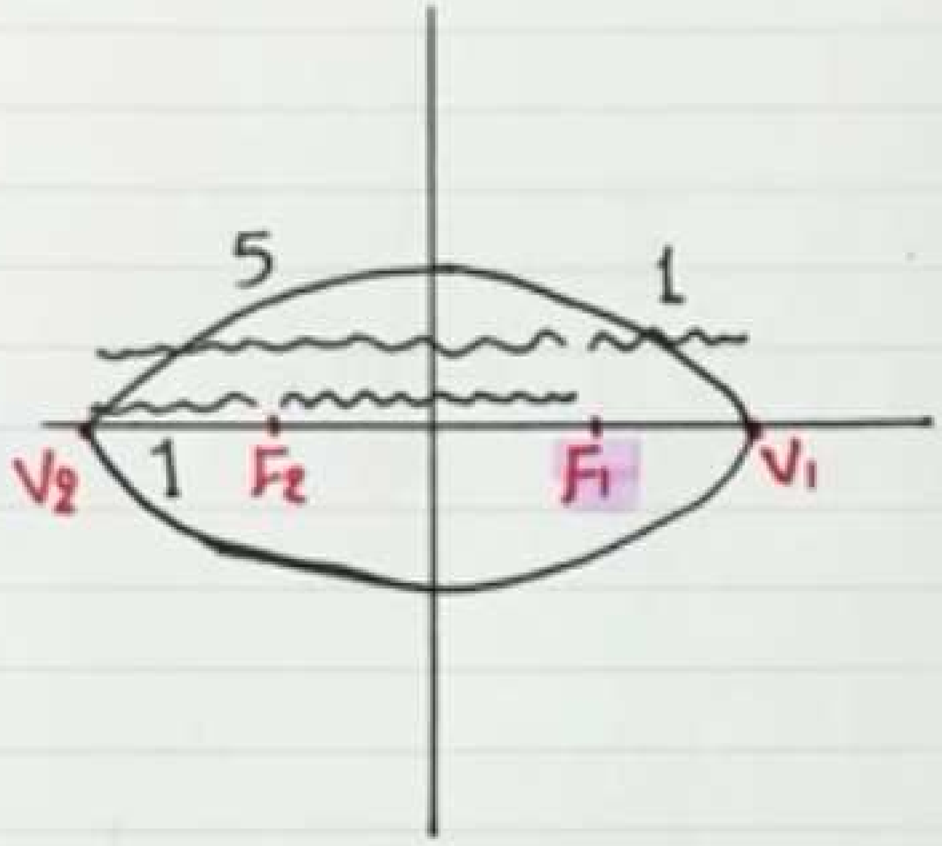
يهمل $b^2 = 49 \rightsquigarrow a^2 = \frac{49}{49} \rightsquigarrow a^2 = 1$

$b^2 = 1 \rightsquigarrow a^2 = \frac{49}{1} \rightsquigarrow a^2 = 49$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$

وزاري 2014 ن

س 27 — جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 5،1 وحدة على الترتيب.



$$2a = 5+1$$

$$\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} = \frac{6}{2} \Rightarrow a = 3$$

$$a^2 = 9$$

$$2c = 5-1$$

$$\frac{\cancel{2}c}{\cancel{2}} = \frac{4}{2} \Rightarrow c = 2$$

$$c^2 = 4$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 4 = 9 - b^2 \Rightarrow b^2 = 9-4$$

$$b^2 = 5$$

الاحتمال الاول
بؤرتاه $\in$ محور x

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

الاحتمال الثاني
بؤرتاه $\in$ محور y

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

س 28 — جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و بؤرتاه على محور السينات واحدى بؤرتيه تبعد عن الرأسين بالعددين 2، 8 وحدة طول على الترتيب

س ㉙ لتكن $Kx^2+4y^2=36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل. واحدى بؤرتيه $(\sqrt{3},0)$ جد قيمة $K \in R$.

الحل //

$F(\sqrt{3},0) \Rightarrow c=\sqrt{3} \Rightarrow c^2=3$

بؤرتاه ∋ محور السينات

$Kx^2+4y^2=36 \;]\div 36$

$\frac{Kx^2}{36}+\frac{4y^2}{\cancel{36}_{9}}=1$

$\frac{x^2}{\frac{36}{K}}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow a^2=\frac{36}{K} \quad \cdots ①$

$\Rightarrow b^2=9$

$c^2=a^2-b^2$

$3=a^2-9$

$3+9=a^2 \Rightarrow a^2=12$

نعوض في ①

$\frac{12}{1}=\frac{36}{K}$

$\frac{\cancel{12}K}{\cancel{12}}=\frac{36}{12} \Rightarrow K=3$

لا تكول فاتني الوكت وبعد ما الحك اقره
ابداي من اليوم وحقق حلمك.

مهم

وزاري 2008 دور ①

س ㉚ قطع ناقص معادلته $4x^2+2y^2=K$ والبعد بين بؤرتيه $2\sqrt{3}$ وحدة طول جد قيمة K

الحل //

$$\cancel{2}c=\cancel{2}\sqrt{3} \Rightarrow c=\sqrt{3} \Rightarrow c^2=3$$

$$\left.4x^2+2y^2=K\right] \div K$$

$$\frac{4x^2}{K}+\frac{2y^2}{K}=1$$

$$\frac{K}{4}<\frac{K}{2}$$

$$b^2=\frac{x^2}{\frac{K}{4}}+\frac{y^2}{\frac{K}{2}}=a^2 \quad =1 \Rightarrow a^2=\frac{K}{2}$$

$$\Rightarrow b^2=\frac{K}{4}$$

$$c^2=a^2-b^2$$

$$\left[3=\frac{K}{2}-\frac{K}{4}\right]\cdot 4$$

$$12=2K-K$$

$$K=12$$

وزاري 2011 تمهيدي

س ㉛ قطع ناقص معادلته $4x^2+12y^2=L$ المسافة بين بؤرتيه تساوي (4) وحدات جد قيمة L.

$L=24$

وزاري خارج

مهم جداً

س 32

قطع ناقص معادلته $2x^2+8y^2=M$ والمسافه بين بؤرتيه تساوي المسافة بين بؤرة القطع المكافئ $y^2=4\sqrt{6}x$ ودليله جد قيمة M.

الحل // (ق.م.٢)

$y^2=4\sqrt{6}\,x$

$y^2=4Px$

$\cancel{4}P=\cancel{4}\sqrt{6} \Rightarrow P=\sqrt{6}$

$\cancel{2}c=\cancel{2}P \Rightarrow c=\sqrt{6} \Rightarrow c^2=6$

$2x^2+8y^2=M \Big] \div M$

$\frac{x^2}{\frac{M}{2}}+\frac{y^2}{\frac{M}{8}}=1 \Rightarrow a^2=\frac{M}{2}$

$\Rightarrow b^2=\frac{M}{8}$

$\underset{\Downarrow}{b^2}\quad\underset{\Downarrow}{a^2}$

$\frac{M}{8} < \frac{M}{2}$

$c^2=a^2-b^2$

$\left[6=\frac{M}{2}-\frac{M}{8}\right]\cdot 8$

$48=4M-M$

$\frac{48}{3}=\frac{\cancel{3}M}{\cancel{3}}$

وزاري 2017 دور② احيائي

س 53

قطع ناقص معادلته $hx^2+ky^2=36$ ومركزه نقطة الاصل ومجموع مربعي طولي محوريه (60) واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2=4\sqrt{3}x$ ماقيمة $h,k\in R$

القطع المكافئ

$$\left.\begin{array}{l} y^2=4\sqrt{3}x \\ y^2=4px \end{array}\right] p=\sqrt{3} \Rightarrow F(\sqrt{3},0)$$

القطع الناقص

$$F(\sqrt{3},0) \Rightarrow c=\sqrt{3}$$

$$c^2=3$$

$$c^2=a^2-b^2$$

$$3=a^2-b^2 \quad \cdots ①$$

$$(2a)^2+(2b)^2=60$$

$$4a^2+4b^2=60 \quad]\div 4$$

$$a^2+\cancel{b^2}=15 \quad \cdots ②$$

$$a^2-\cancel{b^2}=3 \quad \cdots ①$$

$$\frac{\cancel{2}a^2}{\cancel{2}}=\frac{18}{2} \rightsquigarrow a^2=9$$

$$9+b^2=15$$

$$b^2=15-9 \rightsquigarrow b^2=6$$

$$hx^2+ky^2=36\ ]\div 36$$

$$\frac{hx^2}{36}+\frac{ky^2}{36}=1$$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{h}}+\frac{y^2}{\frac{36}{k}}=1$$

بؤرتاه د محور السينات

$$a^2=\frac{36}{h}$$

$$\frac{9}{1}=\frac{36}{h}$$

$$\frac{\cancel{9}h}{\cancel{9}}=\frac{36}{9}$$

$$h=4$$

$$b^2=\frac{36}{k}$$

$$\frac{6}{1}=\frac{36}{k}$$

$$\frac{\cancel{6}k}{\cancel{6}}=\frac{36}{6}$$

$$k=6$$

وزاري 2010 دور ②

س 34 اذا كانت $ky^2+3x^2=Z$ معادلة قطع ناقص بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ويمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x+y=\sqrt{3}$ مع المحور الصادي علما" ان مساحة منطقته $2\sqrt{3}\pi$ وحدة مساحة جد قيمتي $K, Z \in R$

الحل //

المستقيم $2x+y=\sqrt{3}$ ← $x=0$ التقاطع مع محور الصادات

نقطة التقاطع $(0,\sqrt{3})$ ← $y=\sqrt{3}$

القطع الناقص يمر بالنقطة $(0,\overset{y}{\sqrt{3}})$

لان البؤرتان على محور السينات $\therefore b=\sqrt{3}$

المساحة $A=ab\pi$

$2\cancel{\sqrt{3}}\cancel{\pi}=a\cancel{\sqrt{3}}\cancel{\pi}$

$a=2$

$a^2=4 \quad , \quad b^2=3$

$$3x^2 + ky^2 = Z \;\Big] \div Z$$

$$\frac{3x^2}{Z} + \frac{ky^2}{Z} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{Z}{3}} + \frac{y^2}{\frac{Z}{k}} = 1$$

البؤرتان ∋ محور x

$$a^2 = \frac{Z}{3}$$

$$\frac{4}{1} = \frac{Z}{3}$$

$$Z = 12$$

$$b^2 = \frac{Z}{k}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{12}{k}$$

$$\frac{\cancel{3}k}{\cancel{3}} = \frac{12}{3}$$

$$k = 4$$

س 35 ـ باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علم ان بؤرتاه النقطتان $(0,\pm 2)$ ورأساه $(0,\pm 3)$ ومركزه نقطة الاصل

الحل // نفرض ان النقطة $P(x,y) \in$ للقطع الناقص

$a=3$ $\quad F_1(\overset{x_1\ y_1}{0,2}) \quad P(\overset{x_2\ y_2}{x,y}) \quad F_2(\overset{x_1\ y_1}{0,-2})$

$$S=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$PF_1+PF_2=2a$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y+2)^2}=6$$

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=6-\sqrt{x^2+(y+2)^2}$$ بتربيع الطرفين

$$x^2+(y-2)^2=\left(6-\sqrt{x^2+(y+2)^2}\right)^2$$

$$\cancel{x^2}+y^2-4y+4=36-12\sqrt{x^2+(y+2)^2}+\cancel{x^2}+(y+2)^2$$

$$\cancel{y^2}-4y+\cancel{4}=36-12\sqrt{x^2+(y+2)^2}+\cancel{y^2}+4y+\cancel{4}$$

$$12\sqrt{x^2+(y+2)^2}=36+4y+4y$$

$$3\sqrt{x^2+(y+2)^2} = 9+2y$$ بتربيع الطرفين

$$9[x^2+(y+2)^2] = (9+2y)^2$$

$$9(x^2+y^2+4y+4) = 81+36y+4y^2$$

$$9x^2+9y^2+\cancel{36y}+36 = 81+\cancel{36y}+4y^2$$

$$9x^2+9y^2-4y^2 = 81-36$$

$$\frac{9x^2}{45}+\frac{5y^2}{45} = \frac{45}{45}$$

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9} = 1$$ معادلة القطع الناقص

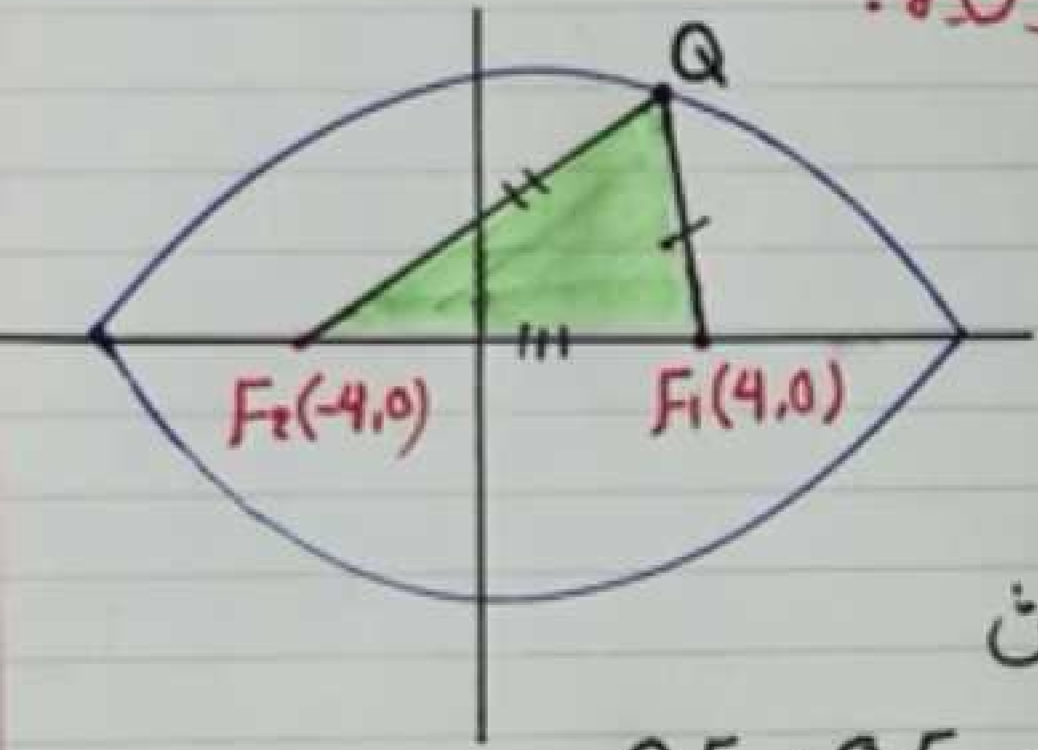
س36 وزاري 2017 دور① احيائي

جد معادلة القطع الناقص الذي طول محوره الكبير يساوي 12cm وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2-12y=0$ بطريقة التعريف.

وزاري 2014 دور ①

س 37 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(4,0)$ ، $F_2(-4,0)$
والنقطة Q تنتمي للقطع الناقص بحيث ان محيط المثلث
QF_1F_2 يساوي (24) وحدة .

الحل //
$c=4 \Rightarrow c^2=16$



محيط المثلث = مجموع اطوال
اضلاعه الثلاث

$$\underline{QF_1+QF_2}+F_1F_2=24$$
$$2a+2c=24\ ]\div 2$$
$$a+c=12$$
$$a+4=12 \Rightarrow a=8 \Rightarrow a^2=64$$

$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 16=64-b^2$$
$$b^2=64-16 \Rightarrow b^2=48$$

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$$ معادلة القطع الناقص

س 38 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل
طول محوره الكبير يساوي (20) وحدة ومحيط المثلث المحدد
ببؤرتيه والنقطة h التي تنتمي للقطع الناقص يساوي
(24) وحدة علماً ان بؤرتاه تنتمي لمحور السينات.

وزاري 2014 دور 4
احيائي 2018 دور 2

س 33 اذا كانت $e+id=\frac{4+2i}{1-i}$ جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه $(0,d)$ وطول محوره الكبير يساوي $2\|e+id\|$

الحل //

$$e+di=\frac{4+2i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}$$

$$e+di=\frac{4+4i+2i+2i^2}{1+1}$$

$$e+di=\frac{4+6i-2}{2}$$

$$e+di=\frac{2}{2}-\frac{6i}{2}$$

$$e+di=1-3i \Rightarrow e=1 \quad , d=-3$$

$F(0,d) \Rightarrow F(0,-3)$ ⇐ القطع الناقص

$$c=3 \Rightarrow c^2=9$$

$$\cancel{2}a=\cancel{2}\|1-3i\| \Rightarrow a=\sqrt{(1)^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9}$$

$$a=\sqrt{10} \Rightarrow a^2=10$$

$$c^2=a^2-b^2$$

$$9=10-b^2 \Rightarrow b^2=10-9 \Rightarrow b^2=1$$

$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{10}=1$ معادلة القطع الناقص

وزاري // 2017 // دور ③

وزاريه على شكل نصف قطع ناقص طول قاعدته (24m) واعلى نقطة ارتفاع لها (9m) جد ارتفاع العمود الموضوع على بعد (6m) من بداية القاعدة.

الحل :- نفرض القاعدة تنطبق على محور السينات و الارتفاع على محور الصادات

$$\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} = \frac{24}{2} \Rightarrow a = 12 \Rightarrow a^2 = 144$$

$$b = 9 \Rightarrow b^2 = 81$$

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} = 1$$ معادلة القطع الناقص

النقطة $(\overset{x}{6}, y)$ ∈ للقطع تحقق المعادلة

$$\frac{\overset{1}{\cancel{36}}}{\underset{4}{\cancel{144}}} + \frac{y^2}{81} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{y^2}{81} = 1$$

$$\frac{y^2}{81} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{y^2}{81} = \frac{3}{4}$$

$$\cancel{\frac{4}{4}}y^2 = \frac{81 \times 3}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{81 \times 3}{4}$$

$$y = \frac{9\sqrt{3}}{2}\ m$$ الارتفاع

انسحاب المحاور للقطع الناقص :-

اولاً: معادلة القطع الناقص الذي محوره الكبير يوازي محور السينات

المركز (h,k)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$F_1(c,0)\quad F_2(-c,0) \Rightarrow F_1(c+h,k)\quad F_2(-c+h,k)$

$v_1(a,0)\quad v_2(-a,0) \Rightarrow v_1(a+h,k)\quad v_2(-a+h,k)$

$m_1(0,b)\quad m_2(0,-b) \Rightarrow m_1(h,b+k)\quad m_2(h,-b+k)$

المفتاح $c^2=a^2-b^2$

طول المحور الكبير $= 2a$

طول المحور الصغير $= 2b$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}$

مثال ① جد البؤرتين والرأسين وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطع الناقص

$$\frac{(x-2)^2}{100}+\frac{(y-3)^2}{36}=1$$

الحل :- المركز $(h,k)=(2,3)$ بؤرتاه $\in$ لمحور x

طول المحور الكبير $a^2=100 \Rightarrow a=10 \Rightarrow 2a=20$

" " الصغير $b^2=36 \Rightarrow b=6 \Rightarrow 2b=12$

$$c^2=a^2-b^2=100-36=64 \Rightarrow c=8$$

البؤرتان
$$\left.\begin{aligned} F_1(c+h,k) &= (8+2,3)=(10,3) \\ F_2(-c+h,k) &= (-8+2,3)=(-6,3) \end{aligned}\right\}$$

الرأسان
$$\left.\begin{aligned} V_1(a+h,k) &= (10+2,3)=(12,3) \\ V_2(-a+h,k) &= (-10+2,3)=(-8,3) \end{aligned}\right\}$$

$$e=\frac{c}{a}$$

$$e=\frac{\cancel{8}}{\cancel{10}}=\frac{4}{5}<1$$

الانسحاب

معادلة القطع الناقص الذي محوره الكبير يوازي محور السينات المركز (h,k)	معادلة القطع الناقص الذي محوره الكبير يوازي محور الصادات المركز (h,k)
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
$F_1(c+h,k)$ $F_2(-c+h,k)$	$F_1(h,c+k)$ $F_2(h,-c+k)$
$V_1(a+h,k)$ $V_2(-a+h,k)$	$V_1(h,a+k)$ $V_2(h,-a+k)$
$M_1(h,b+k)$ $M_2(h,-b+k)$	$M_1(b+h,k)$ $M_2(-b+h,k)$
معادلة المحور الكبير $\Leftarrow$ $y=k$	معادلة المحور الكبير $\Leftarrow$ $x=h$
معادلة المحور الصغير $\Leftarrow$ $x=h$	معادلة المحور الصغير $\Leftarrow$ $y=k$

معادلة المفتاح $\Leftarrow$ $c^2=a^2-b^2$

طول المحور الكبير $= 2a$

طول المحور الصغير $= 2b$

الاختلاف المركزي $\Leftarrow$ $e=\frac{c}{a}$

مثال ③ عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطع الناقص

$$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$$

وزاري 2013 دور ① / 2015 ت

الحل :- بؤرتاه $\in$ محور y

المركز $(h,k)=(-3,-2)$

$a^2=25 \Rightarrow a=5 \Rightarrow 2a=10$ طول المحور الكبير

$b^2=9 \Rightarrow b=3 \Rightarrow 2b=6$ طول المحور الصغير

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=25-9=16 \Rightarrow c=4$

البؤرتان:

$F_1(h,c+k)=(-3,4-2)=(-3,2)$

$F_2(h,-c+k)=(-3,-4-2)=(-3,-6)$

الرأسان:

$v_1(h,a+k)=(-3,5-2)=(-3,3)$

$v_2(h,-a+k)=(-3,-5-2)=(-3,-7)$

القطبان:

$m_1(b+h,k)=(3-3,-2)=(0,-2)$

$m_2(-b+h,k)=(-3-3,-2)=(-6,-2)$

$x=-3 \Leftarrow$ معادلة المحور الكبير

$y=-2 \Leftarrow$ معادلة المحور الصغير

س ① عين البؤرتين والرأسين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق للقطع الزائد ثم ارسمه :-

① $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

الحل // بؤرتاه ∋ محور x

$a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$

$b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$

$c^2 = a^2 + b^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow c = 10$

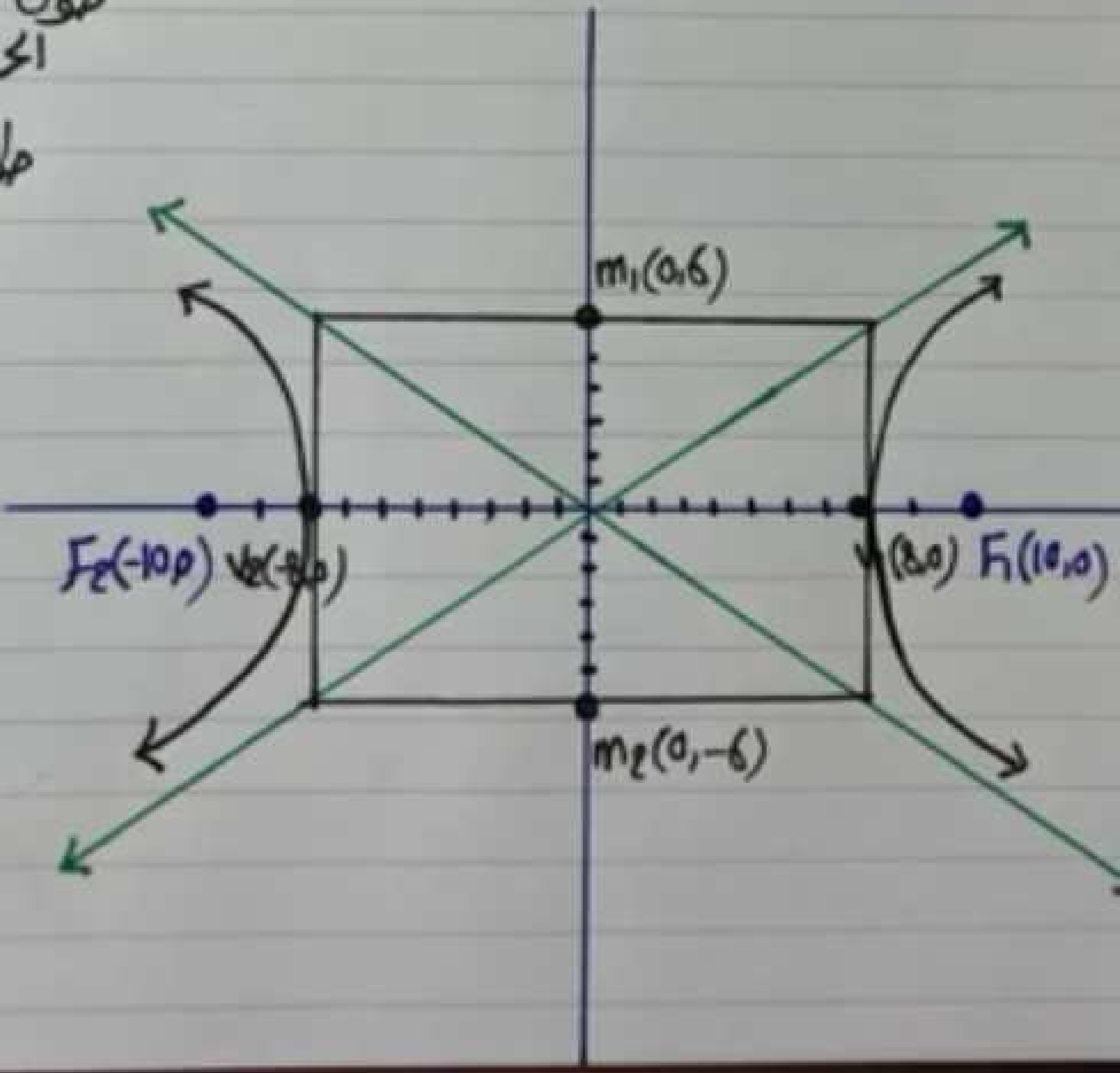
$F_1(10,0)$ $F_2(-10,0)$ البؤرتان

$V_1(8,0)$ $V_2(-8,0)$ الرأسان

$m_1(0,6)$ $m_2(0,-6)$ القطبان

$2a = 16$ طول المحور الحقيقي

$2b = 12$ طول المحور المرافق



② $12x^2 - 4y^2 = 48\ ]\div 48$

$$\frac{\cancel{12}x^2}{_4\cancel{48}} - \frac{\cancel{4}y^2}{_{12}\cancel{48}} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$ بؤرتاه ∋ محور السينات

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 12 = 16 \Rightarrow c = 4$

$F_1(4,0)\quad F_2(-4,0)$ البؤرتان

$V_1(2,0)\quad V_2(-2,0)$ الرأسان

$m_1(0,2\sqrt{3})\quad m_2(0,-2\sqrt{3})$ القطبان

$2a = 4$ طول المحور الحقيقي

$2b = 4\sqrt{3}$ طول المحور التخيلي

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2 > 1$$

③ $16x^2 - 9y^2 = 144$

س ② من ⓐ

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره الحقيقي يساوي (6) وحدات والاختلاف المركزي يساوي (2) وحدة والبؤرتان على محور السينات .

$\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} = \frac{6}{2} \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{c}{3} \Rightarrow c = 6 \Rightarrow c^2 = 36$

$c^2 = a^2 + b^2$

$36 = 9 + b^2$

$36 - 9 = b^2 \Rightarrow b^2 = 27$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$

فرع ⓑ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره المرافق (4) وحدات وبؤرتاه هما $F_1(0, \sqrt{8})$ $F_2(0, -\sqrt{8})$

$\frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}} = \frac{4}{2} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow b^2 = 4$

$c = \sqrt{8} \Rightarrow c^2 = 8$

$c^2 = a^2 + b^2$

$8 = a^2 + 4$

$8 - 4 = a^2 \Rightarrow a^2 = 4$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$

س③ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما النقطتان $(\pm5,0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x=\pm3$ ومركزه نقطة الاصل.

الحل //

$c=5 \Rightarrow c^2=25$

$a=3 \Rightarrow a^2=9$

$c^2=a^2+b^2$

$25=9+b^2$

$25-9=b^2 \Rightarrow b^2=16$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

وزاري 2017 دور② احيائي

س④ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي نقطة تقاطع المستقيم $2x-y=8$ مع محور السينات وطول محوره التخيلي (4) وحدات

الحل // المستقيم $2x-y=8 \Rightarrow \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=\frac{8}{2}$

∵ التقاطع مع محور السينات $y=0 \Rightarrow x=4$

القطع الزائد $F(4,0)\ ,\ c=4 \Rightarrow c^2=16$

$\frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}}=\frac{4}{2} \Rightarrow b=2 \Rightarrow b^2=4$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 16=a^2+4 \Rightarrow 16-4=a^2 \Rightarrow a^2=12$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$$

وزاري 2004 دور ①

س⑤ جد معادلة القطع المخروطي الذي محوراه هما المحورين الاحداثيين واحدى بؤرتيه $(-5,0)$ واحد رأسيه $(3,0)$

∴ قطع زائد

$c=5$, $a=3 \Rightarrow e=\frac{c}{a} \Rightarrow e=\frac{5}{3}>1$

$c^2=25$, $a^2=9 \Rightarrow c^2=a^2+b^2$

$25=9+b^2 \Rightarrow 25-9=b^2$

$\Rightarrow b^2=16$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

واجب — وزاري 2013 دور ①

س⑥ قطع مخروطي بؤرتاه $F_1(4,0)$ $F_2(-4,0)$ واختلافه المركزي يساوي (2) وحدة جد معادلته

وزاري 2014 دور ①

س ⑦
قطع زائد مركزه نقطة الاصل طول محوره الحقيقي (6) وحدات واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(1,2\sqrt{5})$ ، $(1,-2\sqrt{5})$. جد معادلتي القطع المكافئ والقطع الزائد.

الحل //

القطع المكافئ

يمر بالنقطتين $(1,-2\sqrt{5})(1,2\sqrt{5})$

التناظر حول محور السينات ⊕

$y^2=4px \qquad (\overset{x}{1},\overset{y}{2\sqrt{5}})$

$(2\sqrt{5})^2=4p(1)$

$\frac{20}{4}=\frac{4p}{4} \rightsquigarrow p=5$

البؤرة $F(5,0)$

$y^2=4(5)x$

$y^2=20x$ معادلة القطع المكافئ

القطع الزائد

$\frac{2a}{2}=\frac{6}{2} \rightsquigarrow a=3 \rightsquigarrow a^2=9$

$F(5,0) \rightsquigarrow c=5 \rightsquigarrow c^2=25$

$c^2=a^2+b^2$

$25=9+b^2$

$25-9=b^2 \rightsquigarrow b^2=16$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ معادلة القطع الزائد

وزاري 2018 دور ① احيائي

س ⑧
قطع زائد مركزه نقطة الاصل طول محوره الحقيقي (6) وحدات واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(1,2\sqrt{7})$ ، $(1,-2\sqrt{7})$ جد معادلتي القطع المكافئ والقطع الزائد.

وزاري 2019 دور 1

س 5

قطع زائد مركزه نقطة الأصل معادلته $Kx^2 - 9y^2 = h$ وطول محوره الحقيقي (6) وحدات واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ المار بالنقطتين $(1,-4)$ ، $(1,4)$ جد قيمة $K, h \in R$.

القطع المكافئ

يمر بالنقطتين $(1,-4)$ ، $(1,4)$

التناظر حول محور السينات +

$(1,4)$

$y^2 = 4Px$

$16 = 4P(1) \Rightarrow 16 = 4P \Rightarrow P = 4$

$F(4,0)$

القطع الزائد

$F(4,0) \Rightarrow c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$

$2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 9 + b^2 \Rightarrow 16 - 9 = b^2$

$b^2 = 7$

$$\frac{Kx^2}{h} - \frac{9y^2}{h} = \frac{h}{h} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{h}{K}} - \frac{y^2}{\frac{h}{9}} = 1$$

$a^2 = \frac{h}{K}$

$\frac{9}{1} \times \frac{63}{K}$

$\frac{\cancel{9}}{\cancel{9}} K = \frac{63}{9}$

$K = 7$

$b^2 = \frac{h}{9}$

$\frac{7}{1} \times \frac{h}{9}$

$h = 63$

وزاري 2018 دور 2

س 10 — قطع زائد مركزه نقطة الاصل ومعادلته $hx^2-4y^2=L$ طول محوره التخيلي $2\sqrt{5}$ وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $4x^2+13y^2=52$ جد قيمة h, L الحقيقيتان.

القطع الناقص

$$\frac{4x^2}{52}+\frac{13y^2}{52}=\frac{52}{52}$$

$$\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\left.\begin{aligned} a^2&=13 \\ b^2&=4 \end{aligned}\right\} c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=13-4 \Rightarrow c^2=9 \Rightarrow c=3$$

$F(3,0)$

القطع الزائد

$$F(3,0) \Rightarrow c=3 \Rightarrow c^2=9$$

$$\cancel{2}b=\cancel{2}\sqrt{5} \Rightarrow b=\sqrt{5} \Rightarrow b^2=5$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 9=a^2+5 \Rightarrow 9-5=a^2 \Rightarrow a^2=4$$

$a=2$

$$\frac{hx^2}{L}-\frac{4y^2}{L}=\frac{L}{L} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{L}{h}}-\frac{y^2}{\frac{L}{4}}=1$$

$$a^2=\frac{L}{h}$$

$$\frac{4}{1}=\frac{20}{h}$$

$$\frac{\cancel{4}h}{\cancel{4}}=\frac{20}{4}$$

$$h=5$$

$$b^2=\frac{L}{4}$$

$$\frac{5}{1}=\frac{L}{4}$$

$$L=20$$

وزاري 2018 تمهيدي

س— 12

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $x^2-3y^2=12$ والنسبة بين طولي محوريه $=\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الأصل.

القطع الزائد

$$\frac{x^2}{12}-\frac{3y^2}{12}=\frac{12}{12}$$

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$$

$$a^2=12\ ,\ b^2=4 \Rightarrow c^2=a^2+b^2=12+4=16 \Rightarrow c=4 \Rightarrow F(\pm 4,0)$$

القطع الناقص

$$F(\pm 4,0) \Rightarrow c=4 \Rightarrow c^2=16$$

$$\frac{2a}{2b}=\frac{5}{3} \Rightarrow \frac{3a}{3}=\frac{5b}{3} \Rightarrow a=\frac{5b}{3} \Rightarrow a^2=\frac{25b^2}{9} \quad \ldots ①$$

$$c^2=a^2-b^2$$

$$16=\frac{25b^2}{9}-b^2 \Big] \cdot 9 \Rightarrow 144=25b^2-9b^2$$

$$\frac{144}{16}=\frac{16b^2}{16} \Rightarrow b^2=9$$

$$\therefore a^2=\frac{25(9)}{9} \Rightarrow a^2=25$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \quad \text{معادلة القطع الناقص}$$

وزاري 2016 د3

س13/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $3x^2+5y^2=120$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه كنسبة $\frac{1}{2}$.

القطع الناقص

$$\frac{3x^2}{120}+\frac{5y^2}{120}=\frac{120}{120}$$

$$\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{24}=1$$

$$a^2=40,\quad b^2=24 \Rightarrow c^2=a^2-b^2=40-24=16 \Rightarrow c=4$$

$$F(\pm 4,0)$$

القطع الزائد

$$F(\pm 4,0) \Rightarrow c=4 \Rightarrow c^2=16$$

$$\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}c}=\frac{1}{2} \Rightarrow c=2a \Rightarrow c^2=4a^2$$

$$\frac{16}{4}=\frac{\cancel{4}a^2}{\cancel{4}} \Rightarrow a^2=4$$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$16=4+b^2 \Rightarrow 16-4=b^2 \Rightarrow b^2=12$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$ معادلة القطع الزائد

2008

س (14)

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\frac{1}{2}$.

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

وزاري 2015 دور ①

س15

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$

القطع المكافئ

$x^2=-12y$ محور الصادات السالب

$x^2=-4py$

$\frac{\cancel{4}p}{\cancel{4}}=\frac{12}{4} \Rightarrow p=3$

$y=3$ معادلة الدليل

القطع الناقص

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ محور الصادات

$a^2=25 \ , \ b^2=9$

$c^2=a^2-b^2$

$c^2=25-9$

$c^2=16 \Rightarrow c=4$

$F(0,\pm4)$

القطع الزائد

$F(0,\pm4) \Rightarrow c=4 \Rightarrow c^2=16$

$a=3 \quad \Rightarrow a^2=9$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 16=9+b^2 \Rightarrow 16-9=b^2$

$b^2=7$

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$ معادلة القطع الزائد

وزاري 2017 دور ①

مهم جداً جداً

س⑯ جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $36x^2+11y^2=396$ واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي بؤرته على محور الصادات ويمر دليله بالنقطة $(4,7)$.

القطع المكافئ	القطع الناقص
محور الصادات يمر دليله بالنقطة $(4,7)$ $y=7$ $P=7$ $F(0,-7)$	$\frac{36x^2}{396}+\frac{11y^2}{396}=\frac{396}{396}$ $\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{36}=1$ محور الصادات $a^2=36\ ,\ b^2=11$ $c^2=a^2-b^2$ $c^2=36-11=25$ $c=5 \Rightarrow F(0,\pm5)$

القطع الزائد

$$V(0,\pm5) \Rightarrow a=5 \Rightarrow a^2=25$$

$$F(0,-7) \Rightarrow c=7 \Rightarrow c^2=49$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 49=25+b^2$$

$$49-25=b^2 \Rightarrow b^2=24$$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{24}=1$$

معادلة القطع الزائد

وزاري 2018 دور ③

س ⑬

قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وقطع زائد نقطة تقاطع محوريه نقطة الأصل، كل منهما يمر ببؤرة الآخر، فاذا كانت $9x^2+25y^2=225$ معادلة القطع الناقص جد

① مساحة القطع الناقص ② محيط القطع الناقص

③ معادلة القطع الزائد ④ الاختلاف المركزي لكل منهما.

القطع الناقص

$$\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=\frac{225}{225}$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \quad \text{محور السينات}$$

$a^2=25 \Rightarrow a=5$

$b^2=9 \Rightarrow b=3$

$c^2=a^2-b^2=25-9=16$

① $A=ab\pi=(5)(3)\pi$

$A=15\pi$ وحدة مساحة

② $P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$P=2\pi\sqrt{\frac{25+9}{2}}$

$P=2\pi\sqrt{\frac{34}{2}}$

$P=2\pi\sqrt{17}$ وحدة

القطع الزائد

$c^2=25$

$a^2=16$

$c^2=a^2+b^2$

$25=16+b^2$

$25-16=b^2$

وزاري 2014 خارج

س15

جد معادلة القطع الناقص والزائد اذا كان كل منهما بؤرتا بؤرة الاخر وكلاهما تقعان على محور السينات وطول المحور الكبير يساوي $6\sqrt{2}\,m$ وطول المحور الحقيقي يساوي $6m$.

القطع الناقص

محور السينات

$\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} = \frac{6}{2}\sqrt{2}$

$a = 3\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 18$

$c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$

$c^2 = a^2 - b^2$

$9 = 18 - b^2$

$b^2 = 18 - 9$

$b^2 = 9$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

القطع الزائد

محور السينات

$\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} = \frac{6}{2}$

$a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$

$c = 3\sqrt{2} \Rightarrow c^2 = 18$

$c^2 = a^2 + b^2$

$18 = 9 + b^2$

$18 - 9 = b^2$

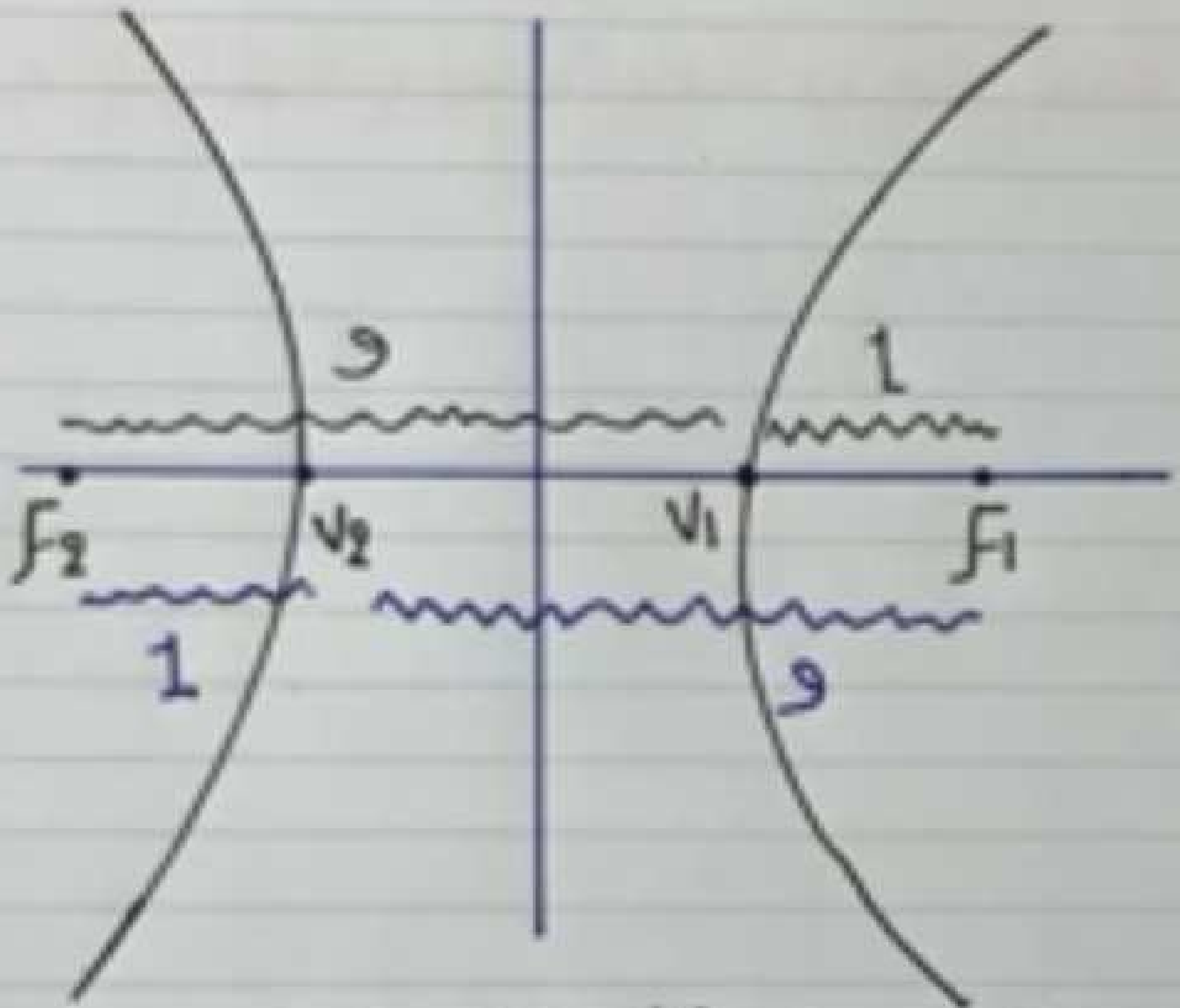
$b^2 = 9$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

س 20

اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل اذا علمت ان احد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 9 ، 1 وحدات على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين



$$2c = 9 + 1 \Rightarrow 2c = 10 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow c^2 = 25$$

$$2a = 9 - 1 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a^2 = 16$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2 \Rightarrow 25 - 16 = b^2 \Rightarrow b^2 = 9$$

الاحتمال الاول
محور السينات

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

الاحتمال الثاني
محور الصادات

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

س ـ (21)

النقطة $P(6, L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ جد كلاً من:

ⓐ قيمة L.

ⓑ طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنى من P.

الحل ـ

ⓐ النقطة $P(6, L)$ تنتمي للقطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 3y^2 = 12$

∴ تحقق المعادلة

$$(6)^2 - 3L^2 = 12$$

$$36 - 12 = 3L^2 \Rightarrow \frac{24}{3} = \frac{3}{3}L^2 \Rightarrow L^2 = 8$$

$$L = \pm 2\sqrt{2}$$

$$P_1(6, 2\sqrt{2}) \quad P_2(6, -2\sqrt{2})$$

ⓑ محور السينات

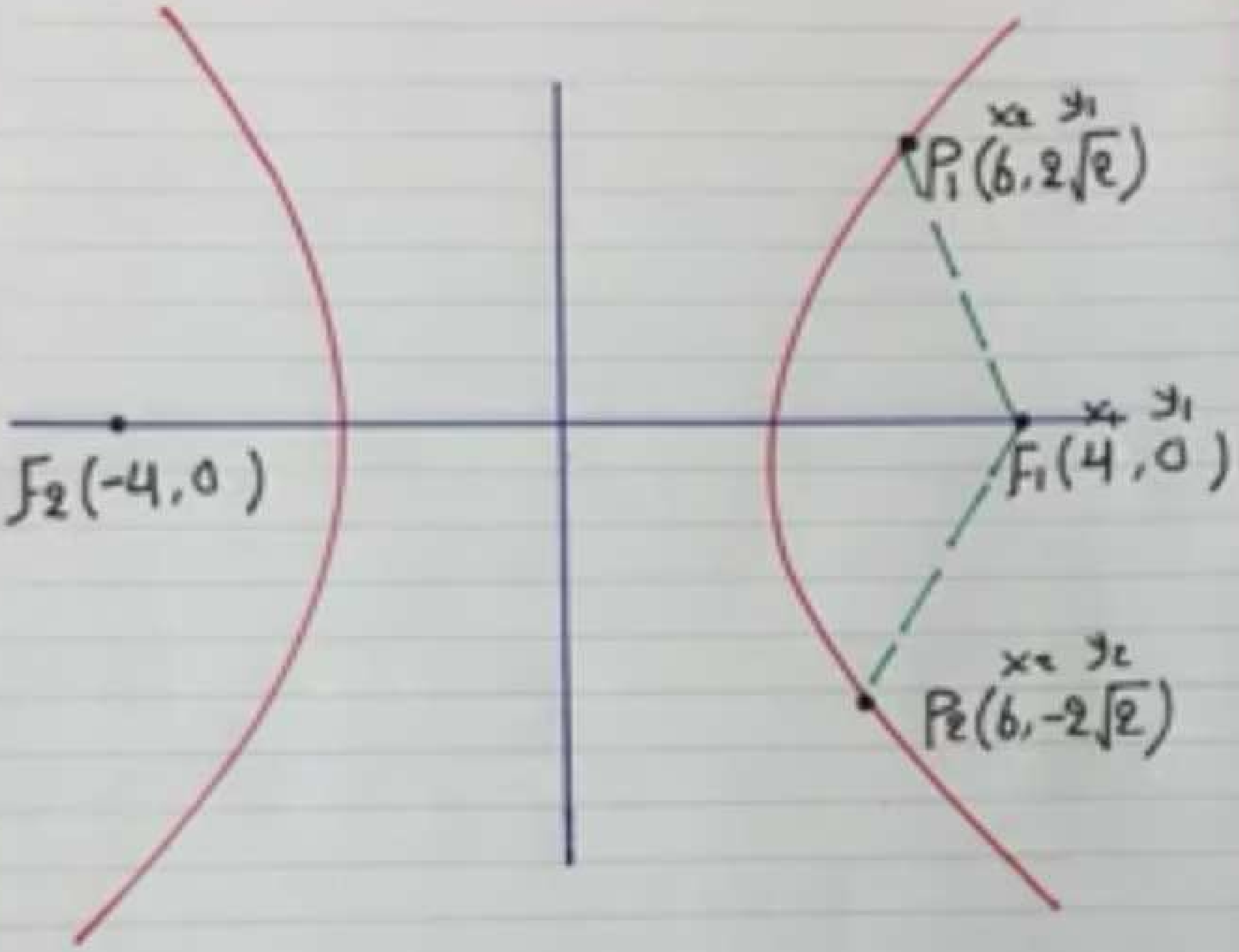
$$\frac{x^2}{12} - \frac{3y^2}{12} = \frac{12}{12}$$

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$a^2 = 12, \; b^2 = 4, \; c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16$$

$$\therefore c = 4$$

البؤرتان $F_1(4, 0) \quad F_2(-4, 0)$



$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$P_1F_1 = \sqrt{(6-4)^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$ وحدة

$$P_2F_1 = \sqrt{(6-4)^2 + (-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$ وحدة

وزاري 2018 دور ① خارج

س 22

اثبت ان النقطة $P(-5,\frac{9}{4})$ تنتمي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ ومركزه نقطة الاصل، ثم جد طولي نصفي القطرين البؤريين المرسومين من نقطة P.

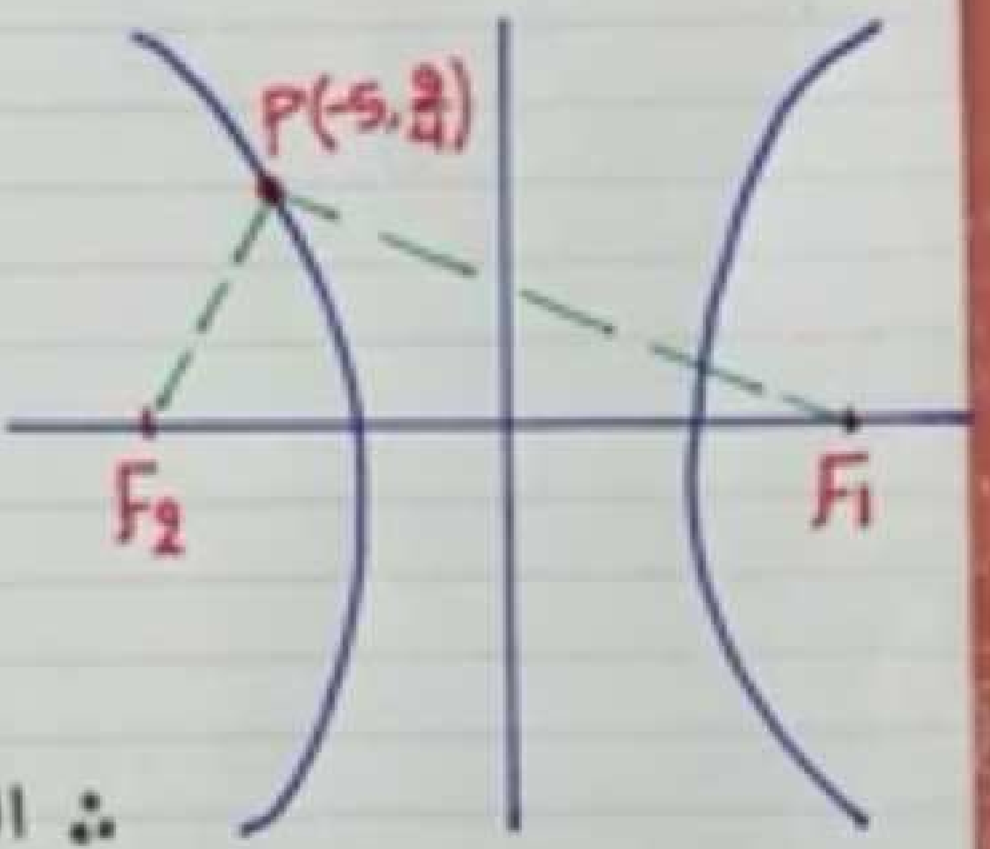
$$P(\overset{x}{-5},\overset{y}{\tfrac{9}{4}})$$

$$\frac{(-5)^2}{16}-\frac{(9/4)^2}{9}$$

$$=\frac{25}{16}-\frac{81/16}{9/1}$$

$$=\frac{25}{16}-\frac{\cancel{81}^{9}}{16}\cdot\frac{1}{\cancel{9}}$$

$$=\frac{25-9}{16}=\frac{16}{16}=1$$



∴ النقطة P تنتمي للقطع الزائد

بؤرتاه ∋ محور السينات

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

$$a^2=16\ ,\ b^2=9$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=16+9=25 \Rightarrow c=5$$

$$F_1(5,0)\quad F_2(-5,0)$$

وزاري 2015 دور ②

س ㉓ جد النقاط على القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1$ والتي تبعد عن البؤرة في الفرع الايمن بمقدار $\frac{1}{\sqrt{3}}$ وحدة

الحل // نفرض النقطة $P(x,y)$

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1$$

$$a^2=3,\ b^2=1,\ c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=3+1 \Rightarrow c^2=4$$

$$\therefore c=2 \Rightarrow F_1(2,0)\quad F_2(-2,0)$$

$$S=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$PF_1=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{x^2-4x+4+y^2}$$ بتربيع الطرفين

$$\frac{1}{3}=\frac{x^2-4x+4+y^2}{1}$$

$$3x^2-12x+12+3y^2=1$$

$$3x^2-12x+3y^2+12-1=0$$

$$3x^2-12x+3y^2+11=0 \quad \text{---} ①$$

$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1 \Big] \cdot 3$

$x^2 - 3y^2 = 3$

$x^2 - 3 = 3y^2$ --- ②

نعوض ② في ①

$3x^2 - 12x + x^2 - 3 + 11 = 0$

$4x^2 - 12x + 8 = 0 \Big] \div 4$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-2)(x-1) = 0$

اما $x - 2 = 0 \rightsquigarrow x = 2$

او $x - 1 = 0 \rightsquigarrow x = 1$

اما $x = 2 \Rightarrow (2)^2 - 3 = 3y^2 \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\cancel{3}y^2}{\cancel{3}}$

$y^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$(2, -\frac{1}{\sqrt{3}})\ (2, \frac{1}{\sqrt{3}})$

او $x = 1 \Rightarrow (1)^2 - 3 = 3y^2 \Rightarrow -\frac{2}{3} = \frac{\cancel{3}y^2}{\cancel{3}}$

$y^2 = -\frac{2}{3}$ يهمل

وزاري 2018 دور ③

جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه هي نقطة المركز للدائرة $x^2+y^2-16y+15=0$ ونصف طول محور المرافق يساوي نصف قطر تلك الدائرة .

الحل :- معادله الدائرة $x^2+y^2-16y+15=0$

$A=0 \quad B=-16 \quad C=15$

المركز $c\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \Rightarrow c(\overset{h}{0}, \overset{k}{8})$

$r=\sqrt{h^2+k^2-c} \Rightarrow r=\sqrt{0+64-15}$

نصف القطر $r=\sqrt{49} \Rightarrow r=7$

$F(0,8)$ (ق.ن) بؤرتاه ∈ لمحور y

$\boxed{c^2=64}$

$\frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}b)=7 \Rightarrow b=7 \Rightarrow \boxed{b^2=49}$

$c^2=a^2+b^2$

$64=a^2+49$

$a^2=64-49 \Rightarrow \boxed{a^2=15}$